’19 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}\ \ (x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\ (t \geqq 0)$ を考える. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ.

(2) $a>0$ とする. 定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)dt$ を求めよ.

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする. $p>1$ とし, C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする. このとき, 曲線 C, 直線 l, x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ.

'19 後期　理系 ❹

関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ を考える. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ.

(2) $a>0$ とする. 定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)dt$ を求めよ.

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする. $p>1$ とし, C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする. このとき, 曲線 C, 直線 l, x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ.

(1) $e^t,\ e^{-t}>0$ なので相加相乗平均の不等式より $g(t) \geqq \sqrt{e^t e^{-t}}=1$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(t))g'(t)dt &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\ &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\ &= \int_0^a \left|\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right|\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\ &= \int_0^a \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 dt \quad \left(0<t<a \text{ において} \frac{e^t-e^{-t}}{2}>0 \text{ なので}\right)\\ &= \int_0^a \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}dt = \left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}-\frac{t}{2}\right]_0^a = \boxed{\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{8}-\frac{a}{2}}\end{aligned}$$

(3) $x>1$ において,

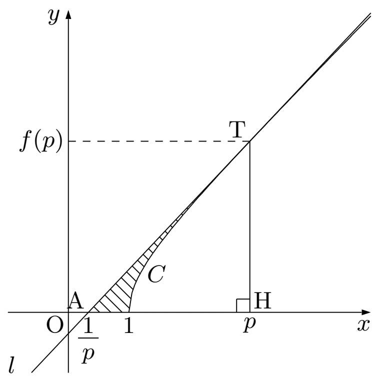
$f'(x)=\dfrac{x}{x^2-1}>0$ より $f(x)$ は単調増加.

$f''(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{-1}{(\sqrt{x^2-1})^3}<0$ より

C は上に凸なので, l は接点 $\mathrm{T}(p,\ f(p))$ のみで C と交わり, l は C の上側である.

$l: y=f'(p)'(x-p)+f(p) \iff y=\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}(x-p)+\sqrt{p^2-1}$

$\iff y=\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}x-\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}$



よって l の x 切片は $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{p},\ 0\right)$.

T から x 軸に下ろした垂線の足を H とし, C と x 軸と TH で囲まれた部分の面積を S_1 とすると,

$S_1=\displaystyle\int_1^p f(x)dx$ $(p>1$ より$)$

ここで, $g(t) \geqq 1$ より $x=g(t)$ とおくことができ,

$dx=g'(t)dt$, $p=g(t)$ を満たす正の t を a とおくと,

x	$1 \to p$
t	$0 \to a$

なので (2) より

$S_1=\displaystyle\int_{t=0}^{t=a} f(g(t))g'(t)dt=\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{8}-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^a-e^{-a}}{2}\right)-\frac{a}{2}$ であり,

$\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}=g(a)=p\cdots①$

$\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2-1}=\sqrt{p^2-1}\cdots②$

① + ② より $e^a=p+\sqrt{p^2-1} \iff a=\log(p+\sqrt{p^2-1})\cdots③$

①, ②, ③ より $S_1=\dfrac{1}{2}p\sqrt{p^2-1}-\dfrac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2-1})$ を得る.

また, $\triangle\mathrm{ATH}=\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{1}{p}\right)f(p)=\dfrac{(p^2-1)\sqrt{p^2-1}}{2p}$ なので,

$S=\triangle\mathrm{ATH}-S_1$

$=\dfrac{(p^2-1)\sqrt{p^2-1}}{2p}-\dfrac{1}{2}p\sqrt{p^2-1}+\dfrac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2-1})=\boxed{-\dfrac{\sqrt{p^2-1}}{2p}+\dfrac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2-1})}$

【背景】

双曲線関数の定義

$t \in \mathbb{R}$ に対し, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$,　$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$,　$\tanh t = \dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ と定める.

相互関係

(i) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$　　(ii) $1 - \tanh^2 t = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$

(証明)

(i) 定義より $\begin{cases} \cosh t + \sinh t = e^t \\ \cosh t - \sinh t = e^{-t} \end{cases}$ なので, 辺々の積をとることにより示された.

(ii) (i) の両辺を $\cosh^2 t$ で割ることにより示された.

加法定理

(i) $\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$

(ii) $\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$

(iii) $\tanh(\alpha+\beta) = \dfrac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1 + \tanh\alpha\tanh\beta}$

(証明)

(i) $(\text{右辺}) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \dfrac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} = (\text{左辺})$

(ii) $(\text{右辺}) = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \dfrac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2} = (\text{左辺})$

(iii)
$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) = \frac{\sinh(\alpha+\beta)}{\cosh(\alpha+\beta)} &= \frac{\sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta}{\cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta} \quad ((\text{i}),\ (\text{ii})\ \text{より}) \\
&= \frac{\dfrac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} + \dfrac{\sinh\beta}{\cosh\beta}}{1 + \dfrac{\sinh\alpha\sinh\beta}{\cosh\alpha\cosh\beta}} \quad \left(\text{分子分母を}\frac{1}{\cosh\alpha\cosh\beta}\text{倍した}\right) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

2 倍角公式

(i) $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$　　(ii) $\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t$　　(iii) $\tanh 2t = \dfrac{2\tanh t}{1 + \tanh^2 t}$

(i)′ $\cosh 2t = \begin{cases} 2\cosh^2 t - 1 \\ 2\sinh^2 t + 1 \end{cases}$

(証明)

加法定理において $\alpha = \beta = t$ とすることにより (i)〜(iii) は示された.
更に (i)′ は (i) に相互作用の (i) を用いることにより示された.

微分公式

(i) $\dfrac{d\cosh t}{dt} = \sinh t$　　(ii) $\dfrac{d\sinh t}{dt} = \cosh t$　　(iii) $\dfrac{d\tanh t}{dt} = \dfrac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t$

(証明)

(i) $\dfrac{d\cosh t}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$

(ii) $\dfrac{d\sinh t}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$

(iii) $\dfrac{d\tanh t}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sinh t}{\cosh t}\right) = \dfrac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh^2 t} = \dfrac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t$

【双曲線関数を用いた $\boldsymbol{S_1}$ の計算】

$y = \sqrt{x^2 - 1} \wedge x \geqq 1 \iff x^2 - y^2 = 1 \wedge x \geqq 1 \wedge y \geqq 0$ より C は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の一部であり,
相互関係 (i) と $\cosh t$ の取る値の範囲より, この双曲線は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ とパラメータ表示できる.

$dx = \sinh t\, dt$ であり, $x = p$ を満たす正の t を a とおくと, $\begin{array}{c|c} x & 1 \to p \\ \hline t & 0 \to a \end{array}$ より

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{x=1}^{x=p} y\, dx = \int_{t=0}^{t=a} \sinh^2 t\, dt = \int_0^a \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt = \left[\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2}\right]_0^a = \frac{\sinh 2a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{\cosh a \sinh a}{2} - \frac{a}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right) - \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$