’19 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日　名前

r を正の実数とする. 複素数平面上に, 点 α を中心とする半径 r の円 C がある. ただし, C は原点を通らないものとする. 点 z が円 C 上を動くとき, 点 $w = \dfrac{1}{z}$ の描く図形を C' とする.

(1) C' は円であることを示せ. さらに, C' の中心と半径を α と r で表せ.

(2) C と C' が一致するとき, C の中心は実軸上または虚軸上にあることを示せ.

'19 後期　理系　❸

r を正の実数とする. 複素数平面上に, 点 α を中心とする半径 r の円 C がある. ただし, C は原点を通らないものとする. 点 z が円 C 上を動くとき, 点 $w=\dfrac{1}{z}$ の描く図形を C' とする.

(1) C' は円であることを示せ. さらに, C' の中心と半径を α と r で表せ.

(2) C と C' が一致するとき, C の中心は実軸上または虚軸上にあることを示せ.

(1) $C:|z-\alpha|=r$ であり, C は原点を通らないので $|\alpha|\neq r\cdots$①

C' の式は

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=r &\iff \left(\frac{1}{w}-\alpha\right)\left(\frac{1}{\overline{w}}-\overline{\alpha}\right)=r^2\\ &\iff (1-\alpha w)(1-\overline{\alpha}\,\overline{w})=r^2w\overline{w}\\ &\iff (r^2-|\alpha|^2)w\overline{w}+\alpha w+\overline{\alpha}\,\overline{w}=1\\ &\iff w\overline{w}+\frac{\alpha}{r^2-|\alpha|^2}w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\overline{w}=\frac{1}{r^2-|\alpha|^2}\quad(\text{①より } r^2-|\alpha|^2\neq 0 \text{ なので})\\ &\iff \left(w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\right)\left(\overline{w}+\frac{\alpha}{r^2-|\alpha|^2}\right)=\frac{1}{r^2-|\alpha|^2}+\frac{\alpha\overline{\alpha}}{\left(r^2-|\alpha|^2\right)^2}\\ &\iff \left|w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\right|^2=\frac{r^2}{\left(r^2-|\alpha|^2\right)^2}\\ &\iff \left|w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\right|=\frac{r}{\left|r^2-|\alpha|^2\right|}\end{aligned}$$

よって C' は中心が $-\dfrac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}$ で半径が $\dfrac{r}{\left|r^2-|\alpha|^2\right|}$ の円であることが示された.

(2) $$\begin{aligned}C \text{ と } C' \text{が一致} &\iff \alpha=-\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\wedge r=\frac{r}{\left|r^2-|\alpha|^2\right|}\\ &\iff \alpha\pm\overline{\alpha}=0\wedge r^2-|\alpha|^2=\pm1\ \ (\text{複号同順})\\ &\iff \begin{cases}\mathrm{Re}(\alpha)=0\\ r^2-|\alpha|^2=1\end{cases}\vee\begin{cases}\mathrm{Im}(\alpha)=0\\ r^2-|\alpha|^2=-1\end{cases}\end{aligned}$$

よって α は虚軸上か実軸上にあることが示された.

【背景】

$w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{C},\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq0)$ で表される z から w への変換を「1 次分数変換」といいます.

$w=\dfrac{1}{z}$ を単純な変換の合成 $w=\dfrac{1}{\overline{z_1}}=\dfrac{1}{z}$ として解釈すると, $z_1=\overline{z}$ は実軸についての対称移動.

$w=\dfrac{1}{\overline{z_1}}$ は単位円に関する反転となり, これらの変換で原点を通らない円は原点を通らない円に変換されることはあらかじめわかります.

【研究】

反転

平面上において, 2 点 O, P に対し, 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が同じ向きで $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ $(r>0)$ を満たす点とするとき, P から Q への変換を「O を中心とし, r を半径とする反転」という.

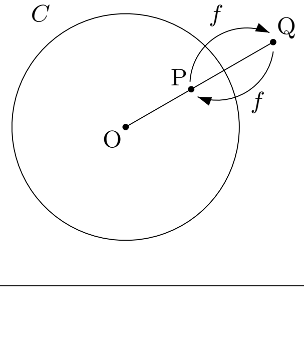
点の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円を C とし, O を中心とする半径 r の反転を f とする.
P を f で変換した点を Q とするとき,

(i) Q を f で変換した点もまた P である.

(ii) O の f による変換は一般には定義しない.

(iii) P が C 外の点のとき, Q は C 内の点 (O 以外) となる.
P が C 上の点のとき, Q は P と一致する.
P が C 内の点 (O 以外) のとき, Q は C 外の点となる.



以上の性質は定義から納得できるでしょう. 次の性質が非常に重要です.

円と直線の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の反転を f とする．

f により，直線は直線か円に変換され，円も直線か円に変換される．

詳しくは以下の通り．

(i) O を通る直線は自分自身に変換される．

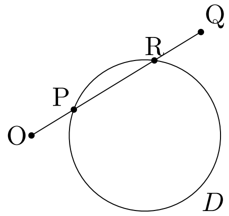
(ii) O を通らない直線は O を通る円に変換される．

(iii) O を通る円は O を通らない直線に変換される．

(iv) O を通らない円は O を通らない円に変換される．

本問は (iv) の場合であったので，ここでは (iv) のみ証明することにします．

(証明)



点 P を f で変換した点を Q とし，P が O を通らない円 D 上をくまなく動くときに Q の描く軌跡を W とする．

OP が円 D と交わる P 以外の交点を R とする (接するときは P と R は一致する) と，方べきの定理より $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=k$ (k は正の定数) とおけるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}\in W &\iff \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2\\ &\iff \frac{k}{\mathrm{OR}}\cdot\mathrm{OQ}=r^2\\ &\iff \mathrm{OQ}=\frac{r^2}{k}\cdot\mathrm{OR}\end{aligned}$$

よって点 Q は，点 R の O を中心とする $\dfrac{r^2}{k}$ 倍の相似拡大であり，P が円 D 上をくまなく動くとき，R も D 上をくまなく動くので，Q の軌跡は D の O を中心とする $\dfrac{r^2}{k}$ 倍の相似拡大であり，これは O を通らない円である．