’19 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

$a,\ t$ は実数で, a は 1 以上とする. 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$, $\mathrm{A}(a\,,\,a-1)$, $\mathrm{P}\left(t\,,\,t^2+1\right)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を $(X\,,\,Y)$ とする.

(1) X と Y を, a と t を用いて表せ.

(2) $a=1$ とする. t が実数全体を動くとき, G の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ.

(3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ.

’19 後期　理系 ❷

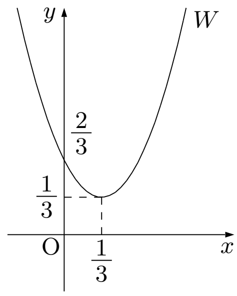
$a,\ t$ は実数で, a は 1 以上とする. 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0\,,0)$, $\mathrm{A}(a\,, a-1)$, $\mathrm{P}\big(t\,, t^2+1\big)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を $(X\,, Y)$ とする.

(1) X と Y を, a と t を用いて表せ.

(2) $a=1$ とする. t が実数全体を動くとき, G の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ.

(3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ.

(1) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ より $\boxed{X=\dfrac{a+t}{3} \land Y=\dfrac{a+t^2}{3}}$



(2) $a=1$ のとき, t が実数全体を動くときの G の軌跡を W とおくと,

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(X,Y)\in W &\iff \exists t\,(\in\mathbb{R}),\ (X,Y)=\left(\frac{1+t}{3},\ \frac{1+t^2}{3}\right)\quad (a=1\text{ より})\\ &\iff \exists t\,(\in\mathbb{R})\left[t=3X-1 \land Y=\frac{1+(3X-1)^2}{3}\right]\\ &\iff Y=3X^2-2X+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって $W: y=3x^2-2x+\dfrac{2}{3} \iff y=3\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)^2+\dfrac{1}{3}$ であり, 図示は右図.

(3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を V とおくと,

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(X,Y)\in V &\iff \exists a\,(a\geqq 1)\ \exists t\,(\in\mathbb{R}),\ (X,Y)=\left(\frac{a+t}{3},\ \frac{a+t^2}{3}\right)\\ &\iff \exists a\,(a\geqq 1)\ \exists t\,(\in\mathbb{R})\left[t=3X-a \land Y=\frac{a+(3X-a)^2}{3}\right]\\ &\iff \exists a\,(a\geqq 1),\ Y=3X^2-2aX+\frac{a^2+a}{3}\\ &\iff \exists a\,(a\geqq 1),\ \underbrace{a^2+(-6X+1)a+9X^2-3Y}_{f(a)\text{ とおく}}=0\cdots ① \end{aligned}$$

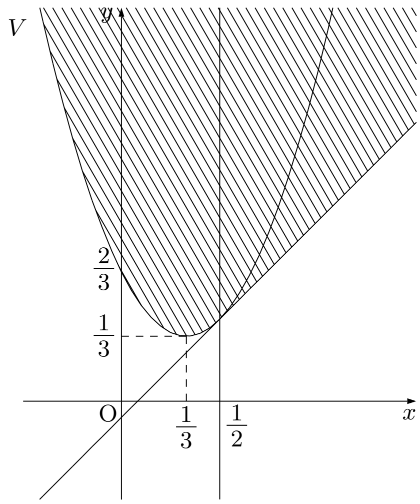
$f(a)=\Big(a+\dfrac{-6X+1}{2}\Big)^2-\dfrac{(-6X+1)^2}{4}+9X^2-3Y$ なので,

$$① \iff f(1)\leqq 0 \lor \begin{cases} (f(a)=0\text{ の判別式})\geqq 0\\ f(1)\geqq 0\\ b=f(a)\text{ の対称軸が }a\geqq 1\text{ にある} \end{cases}\qquad (\text{右図より})$$

$$\iff 9X^2-6X+2-3Y\leqq 0 \lor \begin{cases} (-6X+1)^2-4(9X^2-3Y)\geqq 0\\ 9X^2-6X+2-3Y\geqq 0\\ -\dfrac{-6X+1}{2}\geqq 1 \end{cases}$$

$$\iff Y\geqq 3X^2-2X+\frac{2}{3} \lor \begin{cases} Y\geqq X-\dfrac{1}{12}\\ Y\leqq 3X^2-2X+\dfrac{2}{3}\\ X\geqq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

よって $V: y\geqq 3\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)^2+\dfrac{1}{3} \lor \begin{cases} y\geqq x-\dfrac{1}{12}\\ y\leqq 3\Big(x-\dfrac{1}{3}\Big)^2+\dfrac{1}{3}\\ x\geqq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ であり,



境界の交わり方を調べると

$$\begin{cases} y=x-\dfrac{1}{12}\\ y=3x^2-2x+\dfrac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y=x-\dfrac{1}{12}\\ x^2-x+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x-\dfrac{1}{12}\\ \Big(x-\dfrac{1}{2}\Big)^2=0 \end{cases}$$

なので, $x=\dfrac{1}{2}$ で接するので V の図示は右図斜線部. ただし境界含む.