## ’19 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

$n$ を 3 以上の自然数とする. 当たりくじ 2 本を含む $n$ 本のくじがある. くじを引いて, 当たりなら持ち点に 1 を加算し, はずれなら持ち点は変わらないとする. 最小の持ち点は 0 とし, くじを引いてはもどすという試行を $n$ 回繰り返す.
$k$ を 0 以上の整数とする. $n$ 回の試行が終了した時点の持ち点が $k$ となる確率を $p_n(k)$ とする.

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ. ただし, $e$ を自然対数の底とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてよい.

(3) $p(k) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める. 値 $p(k)$ が最大となるような $k$ の値を求めよ.

## '19 後期 理系 ❶

$n$ を 3 以上の自然数とする. 当たりくじ 2 本を含む $n$ 本のくじがある. くじを引いて, 当たりなら持ち点に 1 を加算し, はずれなら持ち点は変わらないとする. 最小の持ち点は 0 とし, くじを引いてはもどすという試行を $n$ 回繰り返す.
$k$ を 0 以上の整数とする. $n$ 回の試行が終了した時点の持ち点が $k$ となる確率を $p_n(k)$ とする.

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ. ただし, $e$ を自然対数の底とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてよい.

(3) $p(k) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める. 値 $p(k)$ が最大となるような $k$ の値を求めよ.

(1) $p_n(k) = P(n$ 回中当たりを $k$ 回引く$) = \boxed{{}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n-k}}$

(2)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_n(k) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{2}{n-2}\right)^k\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-2}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-2}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdots\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\\
&= \frac{2^k}{k!}(1\cdot1\cdot1\cdots1)e^{-2}\\
&= \boxed{\frac{2^k}{e^2k!}}
\end{aligned}$$

(3) (2) より $p(k) = \dfrac{2^k}{e^2k!}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ なので, $p(k+1) = \dfrac{2^{k+1}}{e^2(k+1)!}$ $(k=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ となる.

$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ に対し複号同順で

$$\left.\begin{aligned}
p(k) \gtreqless p(k+1) &\iff 1 \gtreqless \frac{p(k+1)}{p(k)} \quad (p(k)>0 \text{ より})\\
&\iff 1 \gtreqless \frac{2}{k+1}\\
&\iff k+1 \gtreqless 2 \quad (k+1>0 \text{ より})\\
&\iff k \gtreqless 1
\end{aligned}\right\}\cdots ※$$

よって $\begin{cases} k=0 & \text{のとき, } p(k)<p(k+1)\\ k=1 & \text{のとき, } p(k)=p(k+1)\\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1 & \text{のとき, } p(k)>p(k+1)\end{cases}$ より,

$p(0)<p(1)=p(2)>p(3)>p(4)>\cdots>p(n)$ が成り立つので, $p(k)$ を最大にする $k$ は $\boxed{k=1,\ 2}$

**【※部の別解】数列の増減は階差の符号で調べる**

$$\begin{aligned}
p(k) \gtreqless p(k+1) &\iff 0 \gtreqless p(k+1)-p(k)\\
&\iff 0 \gtreqless \frac{2^k}{e^2(k+1)!}\{2-(k+1)\}\\
&\iff 0 \gtreqless 1-k \quad \left(\frac{2^k}{e^2(k+1)!}>0 \text{ より}\right)\\
&\iff k \gtreqless 1
\end{aligned}$$