’19 後期 理系 ❶

提出 年 月 日 名前

n を 3 以上の自然数とする. 当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある. くじを引いて, 当たりなら持ち点に 1 を加算し, はずれなら持ち点は変わらないとする. 最小の持ち点は 0 とし, くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す.
k を 0 以上の整数とする. n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする.

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ. ただし, e を自然対数の底とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてよい.

(3) $p(k) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める. 値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ.

’19 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

a, t は実数で, a は 1 以上とする. 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$, $\mathrm{A}(a\,,\,a-1)$, $\mathrm{P}\big(t\,,\,t^2+1\big)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を $(X\,,\,Y)$ とする.

(1) X と Y を, a と t を用いて表せ.

(2) $a=1$ とする. t が実数全体を動くとき, G の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ.

(3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ.

’19 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

r を正の実数とする. 複素数平面上に, 点 α を中心とする半径 r の円 C がある. ただし, C は原点を通らないものとする. 点 z が円 C 上を動くとき, 点 $w = \dfrac{1}{z}$ の描く図形を C' とする.

(1) C' は円であることを示せ. さらに, C' の中心と半径を α と r で表せ.

(2) C と C' が一致するとき, C の中心は実軸上または虚軸上にあることを示せ.

’19 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日　名前

関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}\ \ (x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\ (t \geqq 0)$ を考える. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ.

(2) $a>0$ とする. 定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)dt$ を求めよ.

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする. $p>1$ とし, C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする. このとき, 曲線 C, 直線 l, x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ.

'19 後期　理系 ❶

n を 3 以上の自然数とする. 当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある. くじを引いて, 当たりなら持ち点に 1 を加算し, はずれなら持ち点は変わらないとする. 最小の持ち点は 0 とし, くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す.
k を 0 以上の整数とする. n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする.

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ. ただし, e を自然対数の底とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてよい.

(3) $p(k) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める. 値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ.

(1) $p_n(k) = P(n$ 回中当たりを k 回引く$) = \boxed{{}_n\mathrm{C}_k\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n-k}}$

(2)
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_n(k) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{2}{n-2}\right)^k\left(\frac{n-2}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-2}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-2}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}}\cdots\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \\
&= \frac{2^k}{k!}(1\cdot 1\cdot 1\cdots 1)e^{-2} \\
&= \boxed{\frac{2^k}{e^2k!}}
\end{aligned}$$

(3) (2) より $p(k) = \dfrac{2^k}{e^2k!}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ なので, $p(k+1) = \dfrac{2^{k+1}}{e^2(k+1)!}$ $(k=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ となる.

$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ に対し複号同順で

$$\left.\begin{aligned}
p(k) \gtreqless p(k+1) &\iff 1 \gtreqless \frac{p(k+1)}{p(k)} \quad (p(k)>0 \text{ より}) \\
&\iff 1 \gtreqless \frac{2}{k+1} \\
&\iff k+1 \gtreqless 2 \quad (k+1>0 \text{ より}) \\
&\iff k \gtreqless 1
\end{aligned}\right\}\cdots ※$$

よって $\begin{cases} k=0 & \text{のとき},\ p(k)<p(k+1) \\ k=1 & \text{のとき},\ p(k)=p(k+1) \\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1 & \text{のとき},\ p(k)>p(k+1) \end{cases}$ より,

$p(0)<p(1)=p(2)>p(3)>p(4)>\cdots>p(n)$ が成り立つので, $p(k)$ を最大にする k は $\boxed{k=1,\ 2}$

【※部の別解】数列の増減は階差の符号で調べる

$$\begin{aligned}
p(k) \gtreqless p(k+1) &\iff 0 \gtreqless p(k+1)-p(k) \\
&\iff 0 \gtreqless \frac{2^k}{e^2(k+1)!}\{2-(k+1)\} \\
&\iff 0 \gtreqless 1-k \quad \left(\frac{2^k}{e^2(k+1)!}>0 \text{ より}\right) \\
&\iff k \gtreqless 1
\end{aligned}$$

'19 後期　理系 ❷

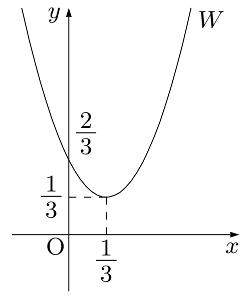
$a,\ t$ は実数で, a は 1 以上とする. 座標平面上の 3 点 O$(0\,,0)$, A$(a\,,a-1)$, P$\left(t\,,t^2+1\right)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を $(X\,,Y)$ とする.

(1) X と Y を, a と t を用いて表せ.

(2) $a=1$ とする. t が実数全体を動くとき, G の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ.

(3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ.

(1) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ より $\boxed{X=\dfrac{a+t}{3}\wedge Y=\dfrac{a+t^2}{3}}$



(2) $a=1$ のとき, t が実数全体を動くときの G の軌跡を W とおくと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(X,\,Y)\in W &\iff \exists t\,(\in\mathbb{R}),\ (X,\,Y)=\left(\frac{1+t}{3},\ \frac{1+t^2}{3}\right)\quad (a=1\text{ より})\\
&\iff \exists t\,(\in\mathbb{R})\left[\,t=3X-1\wedge Y=\frac{1+(3X-1)^2}{3}\,\right]\\
&\iff Y=3X^2-2X+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

よって $W:y=3x^2-2x+\dfrac{2}{3}\iff y=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$ であり, 図示は右図.

(3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を V とおくと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(X,\,Y)\in V &\iff \exists a\,(a\geqq 1)\ \exists t\,(\in\mathbb{R}),\ (X,\,Y)=\left(\frac{a+t}{3},\ \frac{a+t^2}{3}\right)\\
&\iff \exists a\,(a\geqq 1)\ \exists t\,(\in\mathbb{R})\left[\,t=3X-a\wedge Y=\frac{a+(3X-a)^2}{3}\,\right]\\
&\iff \exists a\,(a\geqq 1),\ Y=3X^2-2aX+\frac{a^2+a}{3}\\
&\iff \exists a\,(a\geqq 1),\ \underbrace{a^2+(-6X+1)a+9X^2-3Y}_{f(a)\text{ とおく}}=0\cdots①
\end{aligned}$$

$f(a)=\left(a+\dfrac{-6X+1}{2}\right)^2-\dfrac{(-6X+1)^2}{4}+9X^2-3Y$ なので,

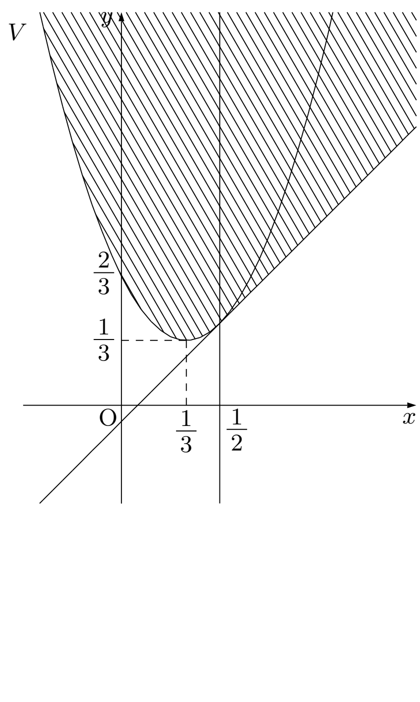
$$\begin{aligned}
① &\iff f(1)\leqq 0\vee\begin{cases}(f(a)=0\text{ の判別式})\geqq 0\\ f(1)\geqq 0\\ b=f(a)\text{ の対称軸が }a\geqq 1\text{ にある}\end{cases}\qquad(\text{右図より})\\
&\iff 9X^2-6X+2-3Y\leqq 0\vee\begin{cases}(-6X+1)^2-4(9X^2-3Y)\geqq 0\\ 9X^2-6X+2-3Y\geqq 0\\ -\dfrac{-6X+1}{2}\geqq 1\end{cases}\\
&\iff Y\geqq 3X^2-2X+\frac{2}{3}\vee\begin{cases}Y\geqq X-\dfrac{1}{12}\\ Y\leqq 3X^2-2X+\dfrac{2}{3}\\ X\geqq\dfrac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

よって $V:y\geqq 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\vee\begin{cases}y\geqq x-\dfrac{1}{12}\\ y\leqq 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\\ x\geqq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ であり,

境界の交わり方を調べると

$$\begin{cases}y=x-\dfrac{1}{12}\\ y=3x^2-2x+\dfrac{2}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}y=x-\dfrac{1}{12}\\ x^2-x+\dfrac{1}{4}=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=x-\dfrac{1}{12}\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0\end{cases}$$

なので, $x=\dfrac{1}{2}$ で接するので V の図示は右図斜線部. ただし境界含む.



'19 後期　理系 ❸

r を正の実数とする. 複素数平面上に, 点 α を中心とする半径 r の円 C がある. ただし, C は原点を通らないものとする. 点 z が円 C 上を動くとき, 点 $w=\dfrac{1}{z}$ の描く図形を C' とする.

(1) C' は円であることを示せ. さらに, C' の中心と半径を α と r で表せ.

(2) C と C' が一致するとき, C の中心は実軸上または虚軸上にあることを示せ.

(1) $C:|z-\alpha|=r$ であり, C は原点を通らないので $|\alpha|\neq r\cdots$①

C' の式は

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=r &\iff \left(\frac{1}{w}-\alpha\right)\left(\frac{1}{\overline{w}}-\overline{\alpha}\right)=r^2\\
&\iff (1-\alpha w)(1-\overline{\alpha}\,\overline{w})=r^2w\overline{w}\\
&\iff (r^2-|\alpha|^2)w\overline{w}+\alpha w+\overline{\alpha}\,\overline{w}=1\\
&\iff w\overline{w}+\frac{\alpha}{r^2-|\alpha|^2}w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\overline{w}=\frac{1}{r^2-|\alpha|^2}\quad(\text{①より } r^2-|\alpha|^2\neq 0 \text{ なので})\\
&\iff \left(w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\right)\left(\overline{w}+\frac{\alpha}{r^2-|\alpha|^2}\right)=\frac{1}{r^2-|\alpha|^2}+\frac{\alpha\overline{\alpha}}{\left(r^2-|\alpha|^2\right)^2}\\
&\iff \left|w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\right|^2=\frac{r^2}{\left(r^2-|\alpha|^2\right)^2}\\
&\iff \left|w+\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\right|=\frac{r}{\left|r^2-|\alpha|^2\right|}
\end{aligned}$$

よって C' は中心が $-\dfrac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}$ で半径が $\dfrac{r}{\left|r^2-|\alpha|^2\right|}$ の円であることが示された.

(2) C と C'が一致

$$\begin{aligned}
&\iff \alpha=-\frac{\overline{\alpha}}{r^2-|\alpha|^2}\wedge r=\frac{r}{\left|r^2-|\alpha|^2\right|}\\
&\iff \alpha\pm\overline{\alpha}=0\wedge r^2-|\alpha|^2=\pm 1\ \ (\text{複号同順})\\
&\iff \begin{cases}\mathrm{Re}(\alpha)=0\\ r^2-|\alpha|^2=1\end{cases}\vee\begin{cases}\mathrm{Im}(\alpha)=0\\ r^2-|\alpha|^2=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

よって α は虚軸上か実軸上にあることが示された.

【背景】

$w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$　$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{C},\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$ で表される z から w への変換を「1 次分数変換」といいます.

$w=\dfrac{1}{z}$ を単純な変換の合成 $w=\dfrac{1}{\overline{z_1}}=\dfrac{1}{z}$ として解釈すると, $z_1=\overline{z}$ は実軸についての対称移動.

$w=\dfrac{1}{\overline{z_1}}$ は単位円に関する反転となり, これらの変換で原点を通らない円は原点を通らない円に変換されることはあらかじめわかります.

【研究】

反転

平面上において, 2 点 O, P に対し, 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が同じ向きで $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ $(r>0)$ を満たす点とするとき, P から Q への変換を「O を中心とし, r を半径とする反転」という.

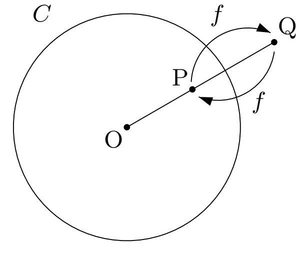
点の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円を C とし, O を中心とする半径 r の反転を f とする.
P を f で変換した点を Q とするとき,

(i) Q を f で変換した点もまた P である.

(ii) O の f による変換は一般には定義しない.

(iii) P が C 外の点のとき, Q は C 内の点 (O 以外) となる.
P が C 上の点のとき, Q は P と一致する.
P が C 内の点 (O 以外) のとき, Q は C 外の点となる.



以上の性質は定義から納得できるでしょう. 次の性質が非常に重要です.

円と直線の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の反転を f とする.

f により, 直線は直線か円に変換され, 円も直線か円に変換される.

詳しくは以下の通り.

(i) O を通る直線は自分自身に変換される.

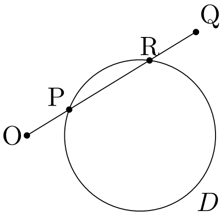
(ii) O を通らない直線は O を通る円に変換される.

(iii) O を通る円は O を通らない直線に変換される.

(iv) O を通らない円は O を通らない円に変換される.

本問は (iv) の場合であったので, ここでは (iv) のみ証明することにします.

(証明)



点 P を f で変換した点を Q とし, P が O を通らない円 D 上をくまなく動くときに Q の描く軌跡を W とする.

OP が円 D と交わる P 以外の交点を R とする (接するときは P と R は一致する) と, 方べきの定理より $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=k$ (k は正の定数) とおけるので,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}\in W &\iff \mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2\\
&\iff \frac{k}{\mathrm{OR}}\cdot\mathrm{OQ}=r^2\\
&\iff \mathrm{OQ}=\frac{r^2}{k}\cdot\mathrm{OR}
\end{aligned}
$$

よって点 Q は, 点 R の O を中心とする $\dfrac{r^2}{k}$ 倍の相似拡大であり, P が円 D 上をくまなく動くとき, R も D 上をくまなく動くので, Q の軌跡は D の O を中心とする $\dfrac{r^2}{k}$ 倍の相似拡大であり, これは O を通らない円である.

'19 後期 理系 ❹

関数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ と関数 $g(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ を考える. ただし, e は自然対数の底とする.

(1) $g(t) \geqq 1$ を示せ.

(2) $a>0$ とする. 定積分 $\displaystyle\int_0^a f(g(t))g'(t)dt$ を求めよ.

(3) 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする. $p>1$ とし, C 上の点 $(p,\ f(p))$ における接線を l とする. このとき, 曲線 C, 直線 l, x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ.

(1) $e^t,\ e^{-t}>0$ なので相加相乗平均の不等式より $g(t) \geqq \sqrt{e^te^{-t}}=1$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^a f(g(t))g'(t)dt &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\ &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\ &= \int_0^a \left|\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right|\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)dt\\ &= \int_0^a \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt \quad \left(0<t<a \text{ において} \frac{e^t-e^{-t}}{2}>0 \text{ なので}\right)\\ &= \int_0^a \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}dt = \left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8}-\frac{t}{2}\right]_0^a = \boxed{\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{8}-\frac{a}{2}}\end{aligned}$$

(3) $x>1$ において,

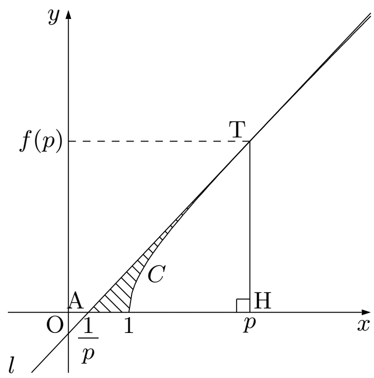
$f'(x)=\dfrac{x}{x^2-1}>0$ より $f(x)$ は単調増加.

$f''(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{-1}{(\sqrt{x^2-1})^3}<0$ より

C は上に凸なので, l は接点 $\mathrm{T}(p,\ f(p))$ のみで C と交わり, l は C の上側である.

$l: y=f'(p)'(x-p)+f(p) \iff y=\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}(x-p)+\sqrt{p^2-1}$

$\iff y=\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}x-\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}$



よって l の x 切片は $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{p},\ 0\right)$.

T から x 軸に下ろした垂線の足を H とし, C と x 軸と TH で囲まれた部分の面積を S_1 とすると,

$S_1=\displaystyle\int_1^p f(x)dx$ $(p>1$ より$)$

ここで, $g(t) \geqq 1$ より $x=g(t)$ とおくことができ,

$dx=g'(t)dt$, $p=g(t)$ を満たす正の t を a とおくと,

x	$1\to p$
t	$0\to a$

なので (2) より

$S_1=\displaystyle\int_{t=0}^{t=a} f(g(t))g'(t)dt=\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{8}-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^a-e^{-a}}{2}\right)-\frac{a}{2}$ であり,

$\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}=g(a)=p\cdots$①

$\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2-1}=\sqrt{p^2-1}\cdots$②

① + ② より $e^a=p+\sqrt{p^2-1} \iff a=\log(p+\sqrt{p^2-1})\cdots$③

①, ②, ③ より $S_1=\dfrac{1}{2}p\sqrt{p^2-1}-\dfrac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2-1})$ を得る.

また, $\triangle\mathrm{ATH}=\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{1}{p}\right)f(p)=\dfrac{(p^2-1)\sqrt{p^2-1}}{2p}$ なので,

$S=\triangle\mathrm{ATH}-S_1$

$=\dfrac{(p^2-1)\sqrt{p^2-1}}{2p}-\dfrac{1}{2}p\sqrt{p^2-1}+\dfrac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2-1})=\boxed{-\dfrac{\sqrt{p^2-1}}{2p}+\dfrac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2-1})}$

【背景】

双曲線関数の定義

$t \in \mathbb{R}$ に対し, $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\tanh t = \dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ と定める.

相互関係

(i) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ (ii) $1 - \tanh^2 t = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$

(証明)

(i) 定義より $\begin{cases} \cosh t + \sinh t = e^t \\ \cosh t - \sinh t = e^{-t} \end{cases}$ なので, 辺々の積をとることにより示された.

(ii) (i) の両辺を $\cosh^2 t$ で割ることにより示された.

加法定理

(i) $\cosh(\alpha+\beta)$
$= \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$

(ii) $\sinh(\alpha+\beta)$
$= \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$

(iii) $\tanh(\alpha+\beta) = \dfrac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1 + \tanh\alpha\tanh\beta}$

(証明)

(i) $(\text{右辺}) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \dfrac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} = (\text{左辺})$

(ii) $(\text{右辺}) = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} = \dfrac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2} = (\text{左辺})$

(iii)
$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = \frac{\sinh(\alpha+\beta)}{\cosh(\alpha+\beta)} &= \frac{\sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta}{\cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta} \quad ((\text{i}),\ (\text{ii})\ \text{より}) \\ &= \frac{\dfrac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} + \dfrac{\sinh\beta}{\cosh\beta}}{1 + \dfrac{\sinh\alpha\sinh\beta}{\cosh\alpha\cosh\beta}} \quad \left(\text{分子分母を}\frac{1}{\cosh\alpha\cosh\beta}\text{倍した}\right) \\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

2 倍角公式

(i) $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$ (ii) $\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t$ (iii) $\tanh 2t = \dfrac{2\tanh t}{1 + \tanh^2 t}$

(i)$'$ $\cosh 2t = \begin{cases} 2\cosh^2 t - 1 \\ 2\sinh^2 t + 1 \end{cases}$

(証明)

加法定理において $\alpha = \beta = t$ とすることにより (i)〜(iii) は示された.
更に (i)$'$ は (i) に相互作用の (i) を用いることにより示された.

微分公式

(i) $\dfrac{d\cosh t}{dt} = \sinh t$ (ii) $\dfrac{d\sinh t}{dt} = \cosh t$ (iii) $\dfrac{d\tanh t}{dt} = \dfrac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t$

(証明)

(i) $\dfrac{d\cosh t}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$

(ii) $\dfrac{d\sinh t}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$

(iii) $\dfrac{d\tanh t}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sinh t}{\cosh t}\right) = \dfrac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh^2 t} = \dfrac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t$

【双曲線関数を用いた S_1 の計算】

$y = \sqrt{x^2 - 1} \wedge x \geqq 1 \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \wedge x \geqq 1 \wedge y \geqq 0$ より C は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の一部であり,
相互関係 (i) と $\cosh t$ の取る値の範囲より, この双曲線は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ とパラメータ表示できる.

$dx = \sinh t\,dt$ であり, $x = p$ を満たす正の t を a とおくと, $\begin{array}{c|c} x & 1 \to p \\ \hline t & 0 \to a \end{array}$ より

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{x=1}^{x=p} y\,dx = \int_{t=0}^{t=a} \sinh^2 t\,dt = \int_0^a \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = \left[\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2}\right]_0^a = \frac{\sinh 2a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{\cosh a\sinh a}{2} - \frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right) - \frac{a}{2}\end{aligned}$$