'18 後期 理系 ❹

提出　　年　　月　　日 名前

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とし, 曲線 $y=f(x)$ を C とする. また, $s>1$ とし, $0 \leqq x \leqq \log s$ の範囲における C の長さを $L(s)$ とする. ただし, $\log s$ は s の自然対数であり, e は自然対数の底である.

(1) $L(s)$ を s で表せ.

(2) P を x 座標が $\log s$ であるような C 上の点とし, この点での C の接線を l とする. $\mathrm{Q}(v\,,\,w)$ を $v<\log s$ かつ $\mathrm{PQ}=L(s)$ を満たす l 上の点とするとき, v と w を s で表せ.

(3) (2) において, s が 1 より大きい実数を動くとき, 点 $\mathrm{R}(-v+\log s\,,\,w)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ.

'18 後期　理系 ❹

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とし, 曲線 $y=f(x)$ を C とする. また, $s>1$ とし, $0 \leqq x \leqq \log s$ の範囲における C の長さを $L(s)$ とする. ただし, $\log s$ は s の自然対数であり, e は自然対数の底である.

(1) $L(s)$ を s で表せ.

(2) P を x 座標が $\log s$ であるような C 上の点とし, この点での C の接線を l とする. $\mathrm{Q}(v,\,w)$ を $v<\log s$ かつ $\mathrm{PQ}=L(s)$ を満たす l 上の点とするとき, v と w を s で表せ.

(3) (2) において, s が 1 より大きい実数を動くとき, 点 $\mathrm{R}(-v+\log s\,,\,w)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ.

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ より

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}=\frac{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad (e^x+e^{-x}>0 \text{ より}) \text{ なので},$$

$$L(s)=\int_0^{\log s}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^{\log s}=\frac{1}{2}(s-s^{-1})-\frac{1}{2}(1-1)$$

よって $\boxed{L(s)=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{s}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $-\begin{pmatrix}1\\ f'(\log s)\end{pmatrix}$ 向きで大きさが $L(s)$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{L(s)}{\sqrt{1+(f'(\log s))^2}}\begin{pmatrix}1\\ f'(\log s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log s\\ \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}{\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\end{pmatrix}$$

よって

$$v=\boxed{\log s-\frac{s-\frac{1}{s}}{s+\frac{1}{s}}}$$

$$w=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(s-\frac{1}{s}\right)^2}{s+\frac{1}{s}}=\frac{1}{2\left(s+\frac{1}{s}\right)}\left\{\left(s+\frac{1}{s}\right)^2-\left(s-\frac{1}{s}\right)^2\right\}=\boxed{\frac{2}{s+\frac{1}{s}}}$$

(3) $\mathrm{R}(x\,,\,y)$ とおく.

s が $s>1$ を満たして動くときに R が描く図形を W とおくと,

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(x,\,y)\in W &\iff \exists s\,(>1),\ (x,\,y)=(-v+\log s,\,w)\\ &\iff \exists s\,(>1)\left[x=\frac{s-\frac{1}{s}}{s+\frac{1}{s}}\wedge y=\frac{2}{s+\frac{1}{s}}\right]\\ &\iff \exists s\,(>1)\left[s+\frac{1}{s}=\frac{2}{y}\wedge s-\frac{1}{s}=\frac{2x}{y}\right]\\ &\iff \exists s\,(>1)\left[s=\frac{1+x}{y}\wedge \frac{1}{s}=\frac{1-x}{y}\right]\\ &\iff \frac{1+x}{y}\cdot\frac{1-x}{y}=1\wedge\frac{1+x}{y}>1\\ &\iff x^2+y^2=1\wedge\frac{x-y+1}{y}>0\end{aligned}$$

よって $W: x^2+y^2=1\wedge\dfrac{x-y+1}{y}>0$ なので, 図示は右図実線部.