’18 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

十分な数の赤球と青玉が手元にあるものとする. a と n を自然数とし, はじめに, 空の袋に a 個の赤玉を入れておく. 以下の試行を繰り返す. 袋の中から玉を 1 個取り出し, それが赤玉ならば青玉を 1 個袋に入れ, 青玉ならば赤玉を 1 個袋に入れる. さらに, 取り出した玉自体も袋に戻し, 袋の中の玉をよくかき混ぜる. 結果として, 1 回の試行ごとに袋の中にある玉は 1 個ずつ増える. この試行を繰り返したとき, n 回目の施行後に袋に入っている赤玉の個数が k である確率を $p_n(k)$ で表す. 例えば, $p_1(k)$ の値は k が a のとき 1, そのほかの場合は 0 である. また, $M_n = \sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$ とする.

(1) $p_2(k)$ を求めよ.

(2) $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$ と表すとき, B と C を $a,\ k,\ n$ で表せ.

(3) $M_1 = a,\quad M_{n+1} = \dfrac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$ を示せ.

(4) (3) の式を満たす数列 $\{M_n\}$ の一般項を求めよ. さらに, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{n}$ を求めよ.

'18 後期 理系 ❸

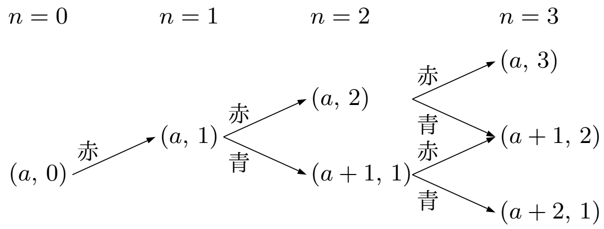
十分な数の赤球と青玉が手元にあるものとする. a と n を自然数とし, はじめに, 空の袋に a 個の赤玉を入れておく. 以下の試行を繰り返す. 袋の中から玉を 1 個取り出し, それが赤玉ならば青玉を 1 個袋に入れ, 青玉ならば赤玉を 1 個袋に入れる. さらに, 取り出した玉自体も袋に戻し, 袋の中の玉をよくかき混ぜる. 結果として, 1 回の試行ごとに袋の中にある玉は 1 個ずつ増える. この試行を繰り返したとき, n 回目の施行後に袋に入っている赤玉の個数が k である確率を $p_n(k)$ で表す. 例えば, $p_1(k)$ の値は k が a のとき 1, そのほかの場合は 0 である. また, $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$ とする.

(1) $p_2(k)$ を求めよ.

(2) $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$ と表すとき, B と C を $a,\ k,\ n$ で表せ.

(3) $M_1 = a,\quad M_{n+1} = \dfrac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$ を示せ.

(4) (3) の式を満たす数列 $\{M_n\}$ の一般項を求めよ. さらに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}$ を求めよ.



(赤の個数, 青の個数) とすると, 何色を取り出すかと, その結果の玉の個数の推移は右図のようになる.

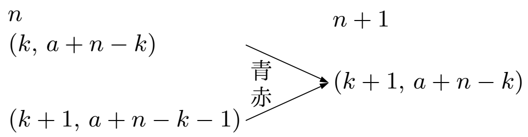
1 回目のとき玉の総数は $a+1$ 個なので,

$$p_1(k) = \begin{cases} 1 & (k=a \text{ のとき}) \\ 0 & (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a-1,\ a+1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots ①$$

(1) 2 回目のとき玉の総数は $a+2$ 個なので,

$$\boxed{p_2(k) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+1} & (k=a \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{a+1} & (k=a+1 \text{ のとき}) \\ 0 & (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a-1,\ a+2 \text{ のとき}) \end{cases}}$$

(2) n 回目のとき玉の総数は $a+n$ 個なので, $\begin{cases} \text{赤が } k \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n) \text{ 個のとき青は } a+n-k \text{ 個} \\ \text{赤が } k+1 \quad (k=-1,\ 0,\ \cdots,\ a+n-1) \text{ 個のとき青は } a+n-k-1 \text{ 個} \end{cases}$



よって, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n-1$ に対し,

$n+1$ 回目に赤が $k+1$ 個となる推移は右図のようになるので,

$$p_{n+1}(k+1) = \frac{a+n-k}{a+n}p_n(k) + \frac{k+1}{a+n}p_n(k+1) \cdots ②$$

以上より $\boxed{(B,\ C) = \left(\dfrac{a+n-k}{a+n},\ \dfrac{k+1}{a+n}\right)}$

(3) $M_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{a+1} kp_1(k) = 0\underbrace{p_1(0)}_{0} + 1\underbrace{p_1(1)}_{0} + \cdots + (a-1)\underbrace{p_1(a-1)}_{0} + a\underbrace{p_1(a)}_{1} + (a+1)\underbrace{p_1(a+1)}_{0} = a$ (①より)

② $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n-1)$

$$\iff (k+1)p_{n+1}(k+1) = \frac{k+1}{a+n}\{(a+n-k)p_n(k) + (k+1)p_n(k+1)\} \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n-1)$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)p_{n+1}(k+1) = \frac{1}{a+n}\left\{\sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)(a+n-k)p_n(k) + \sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)^2p_n(k+1)\right\}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{a+n} ip_{n+1}(i) = \frac{1}{a+n}\left\{\sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)(a+n-k)p_n(k) + \sum_{i=1}^{a+n} i^2p_n(i)\right\}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{a+n+1} kp_{n+1}(k) - 0p_{n+1}(0) - (a+n+1)\underbrace{p_{n+1}(a+n+1)}_{0}$$

$$= \frac{1}{a+n}\left\{\sum_{k=0}^{a+n}(k+1)(a+n-k)p_n(k) - (a+n+1)0p_n(a+n) + \sum_{k=0}^{a+n} k^2p_n(k) - 0^2p_n(0)\right\}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{a+n+1} kp_{n+1}(k) = \frac{1}{a+n}\left\{(a+n-1)\sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k) + (a+n)\sum_{k=0}^{a+n} p_n(k)\right\}$$

$$\iff M_{n+1} = \frac{a+n-1}{a+n}M_n + 1 \quad (n \geqq 1) \cdots ③$$

'18 後期　理系 ❸

(4) ③ $\iff (a+n)M_{n+1}-(a+n-1)M_n=a+n\ \ (n \geqq 1)$ なので, $n \geqq 2$ において

$$\sum_{j=1}^{n-1}\{(a+j)M_{j+1}-(a+j-1)M_j\}=\sum_{j=1}^{n-1}(a+j) \iff (a+n-1)M_n-aM_1=\frac{\{(a+1)+(a+n-1)\}(n-1)}{2}$$
$$\iff (a+n-1)M_n=a^2+\frac{(n+2a)(n-1)}{2}$$
$$\iff M_n=a+\frac{n(n-1)}{2(a+n-1)}$$

これは $n=1$ のときも正しく M_n を表しているので $\boxed{M_n=a+\dfrac{n(n-1)}{2(a+n-1)}\ (n \geqq 1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{n}+\frac{1-\dfrac{1}{n}}{2\left(1+\dfrac{a-1}{n}\right)}\right\}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

【考察】

M_n は n 回後の赤玉の個数の期待値です.

このとき玉の総数は $a+n$ ですから $\dfrac{M_n}{a+n}$ は赤玉の比率の平均です.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{a+n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{a+n}+\frac{1-\dfrac{1}{n}}{2\left(1+\dfrac{a-1}{n}\right)\left(1+\dfrac{a}{n}\right)}\right\}=\frac{1}{2}$$

よりこの試行を繰り返していくと赤玉と青玉の比率の平均は等しくなります.

十分大きな n では $a+n$ で割ることと n で割ることはほとんど同じとみなせるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}$ も同じく赤玉の比率を表していると言えます.