’18 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

z を虚部が正である複素数とし, O(0), P(2), Q($2z$) を複素数平面上の 3 点とする. △OPR, △PQS, △QOT は △OPQ の内部と重ならない正三角形とし, 3 点 U, V, W をそれぞれ △OPR, △PQS, △QOT の重心とする.

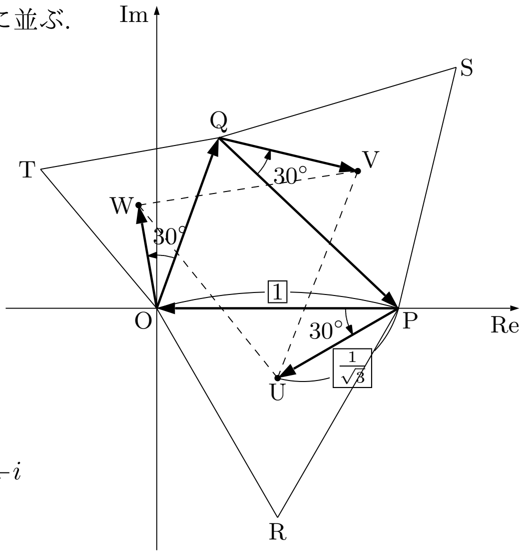
(1) 3 点 U, V, W が表す複素数をそれぞれ z で表せ.

(2) △UVW は正三角形であることを示せ.

(3) z が $|z-i|=\dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき, △UVW の重心 G の軌跡を複素数平面上に図示せよ. ただし, i は虚数単位を表す.

'18 後期　理系 ❷

z を虚部が正である複素数とし, O(0), P(2), Q($2z$) を複素数平面上の 3 点とする. △OPR, △PQS, △QOT は △OPQ の内部と重ならない正三角形とし, 3 点 U, V, W をそれぞれ △OPR, △PQS, △QOT の重心とする.
(1) 3 点 U, V, W が表す複素数をそれぞれ z で表せ.
(2) △UVW は正三角形であることを示せ.
(3) z が $|z-i|=\dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき, △UVW の重心 G の軌跡を複素数平面上に図示せよ. ただし, i は虚数単位を表す.



(1) U(u), V(v), W(w) とおく. $\mathrm{Im}(2z)>0$ より, 3 点 O, P, Q は左回りに並ぶ.

よって $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PR}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{PO}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{QS}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\text{を}\end{cases}$ 60° 回転したものとなるので,

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PU}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{PO}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{QV}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{OW}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\text{を}\end{cases}$ 30° 回転して $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものである.

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ より

$u-2=(0-2)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i\right) \iff u = 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$

$v-2z=(2-2z)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i\right) \iff v = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)z+1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$

$w-0=(2z-0)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i\right) \iff w = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)z$

以上より $\boxed{\mathrm{U}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right),\ \mathrm{V}\left(\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)z+1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right),\ \mathrm{W}\left(\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)z\right)}$

(2)
$$\begin{aligned}(v-u)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) &= \left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z+\frac{2}{\sqrt{3}}i\right\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\\ &= w-u\end{aligned}$$

より $\overrightarrow{\mathrm{UW}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{UV}}$ を 60° 回転したものなので, △UVW は正三角形である.

(3) G(g) とおくと, $g=\dfrac{u+v+w}{3}=\dfrac{2z+2}{3}$ が成り立つ.

z が $D:|z-i|=\dfrac{1}{2}$ 内を動くときに g が描く図形を C とおくと,

$$\begin{aligned} g\in C &\iff \exists z\,(\in D),\ g=\frac{2}{3}(z+1)\\ &\iff \exists z\left[\,|z-i|=\frac{1}{2}\wedge z=\frac{3}{2}g-1\right]\\ &\iff \left|\left(\frac{3}{2}g-1\right)-i\right|=\frac{1}{2}\\ &\iff \left|g-\frac{2(1+i)}{3}\right|=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって $C:\left|g-\dfrac{2(1+i)}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$ であり,

これは点 $\dfrac{2(1+i)}{3}$ を中心とし, $\dfrac{1}{3}$ を半径とする円なので, 図示は右図.