’18 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

n を自然数とする.

(1) 次の等式を示せ.

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$$

(2) $w=\dfrac{10^{n(n+1)}-2^{n+1}}{10^n-2}$ とおく. w は整数であることを示せ. また, w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ.

(3) 実数 x に対し, $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. $\left[\dfrac{10^{n(n+1)}}{10^n-2}\right]$ を 10^n で割った余りを求めよ.

’18 後期　理系 ❶

n を自然数とする.

(1) 次の等式を示せ.

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$$

(2) $w=\dfrac{10^{n(n+1)}-2^{n+1}}{10^n-2}$ とおく. w は整数であることを示せ. また, w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ.

(3) 実数 x に対し, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す. $\left[\dfrac{10^{n(n+1)}}{10^n-2}\right]$ を 10^n で割った余りを求めよ.

(1)【方針】「全ての自然数に対し」と言えば帰納法

$\underbrace{(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}}_{P(n)}$ とすると,

(i) $(P(1)$ 左辺$)=(a-b)(a+b)=a^2-b^2=(P(1)$ 右辺$)$ より $P(1)$ は成り立つ.

(ii) $k\in\mathbb{N}$ に対し, $P(k)$ を仮定して $P(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned}(P(k+1)\text{ 左辺})&=(a-b)(a^{k+1}+a^kb+a^{k-1}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{k-1}+ab^k+b^{k+1})\\&=a(a-b)(a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{k-2}+ab^{k-1})+(a-b)b^{k+1}\\&=a(a^{k+1}-b^{k+1})+(a-b)b^{k+1}\quad(\text{仮定 }P(k)\text{ より})\\&=a^{k+2}-b^{k+2}\\&=(P(k+1)\text{ 右辺})\end{aligned}$$

よって $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$ が成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により $\forall n(n\in\mathbb{N}),\ P(n)$ が示された.

(2) $a=10^n,\ b=2$ とおくと, (1) の結論より

$w=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n$ であり,

この各項は整数なので w は整数であることが示された.

また, $w=a(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})+b^n$ であり,

(　) 内は整数かつ b^n は a より小さい正の整数であることから, w を a で割った余りは b^n であることが示された.

(3) $a=10^n,\ b=2$ とおくと, 求めたいのは $\left[\dfrac{a^{n+1}}{a-b}\right]$ を a で割った余りである.

$\dfrac{a^{n+1}}{a-b}=w+\dfrac{b^{n+1}}{a-b}$ であり, $r=\dfrac{b^{n+1}}{a-b}$ とおくと,

$$\begin{cases}r>0\\1-r=\dfrac{a-b-b^{n+1}}{a-b}>\dfrac{a-b^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\dfrac{10^n-2\cdot2^{n+1}}{10^n-2}=\dfrac{2^n(5^n-4)}{10^n-2}>0\end{cases}$$ より $0<r<1$ なので,

$\left[\dfrac{a^{n+1}}{a-b}\right]=[\,w+r\,]=w$ （(2) より $w\in\mathbb{Z}$ なので) が成り立ち, これを a で割った余りは $\boxed{2^n}$ （(2) より)