'18 後期 理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

n を自然数とする.

(1) 次の等式を示せ.

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$$

(2) $w=\dfrac{10^{n(n+1)}-2^{n+1}}{10^n-2}$ とおく. w は整数であることを示せ. また, w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ.

(3) 実数 x に対し, $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. $\left[\dfrac{10^{n(n+1)}}{10^n-2}\right]$ を 10^n で割った余りを求めよ.

’18 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

z を虚部が正である複素数とし, O(0), P(2), Q($2z$) を複素数平面上の 3 点とする. △OPR, △PQS, △QOT は △OPQ の内部と重ならない正三角形とし, 3 点 U, V, W をそれぞれ △OPR, △PQS, △QOT の重心とする.

(1) 3 点 U, V, W が表す複素数をそれぞれ z で表せ.

(2) △UVW は正三角形であることを示せ.

(3) z が $|z - i| = \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき, △UVW の重心 G の軌跡を複素数平面上に図示せよ. ただし, i は虚数単位を表す.

’18 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

十分な数の赤球と青玉が手元にあるものとする. a と n を自然数とし, はじめに, 空の袋に a 個の赤玉を入れておく. 以下の試行を繰り返す. 袋の中から玉を 1 個取り出し, それが赤玉ならば青玉を 1 個袋に入れ, 青玉ならば赤玉を 1 個袋に入れる. さらに, 取り出した玉自体も袋に戻し, 袋の中の玉をよくかき混ぜる. 結果として, 1 回の試行ごとに袋の中にある玉は 1 個ずつ増える. この試行を繰り返したとき, n 回目の施行後に袋に入っている赤玉の個数が k である確率を $p_n(k)$ で表す. 例えば, $p_1(k)$ の値は k が a のとき 1, そのほかの場合は 0 である. また, $M_n = \sum\limits_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$ とする.

(1) $p_2(k)$ を求めよ.

(2) $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$ と表すとき, B と C を $a,\ k,\ n$ で表せ.

(3) $M_1 = a,\quad M_{n+1} = \dfrac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$ を示せ.

(4) (3) の式を満たす数列 $\{M_n\}$ の一般項を求めよ. さらに, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{n}$ を求めよ.

’18 後期　理系 ❹　　　　提出　　年　　月　　日 名前

$f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ とし, 曲線 $y = f(x)$ を C とする. また, $s > 1$ とし, $0 \leqq x \leqq \log s$ の範囲における C の長さを $L(s)$ とする. ただし, $\log s$ は s の自然対数であり, e は自然対数の底である.

(1) $L(s)$ を s で表せ.

(2) P を x 座標が $\log s$ であるような C 上の点とし, この点での C の接線を l とする. $\mathrm{Q}(v\,,\, w)$ を $v < \log s$ かつ $\mathrm{PQ} = L(s)$ を満たす l 上の点とするとき, v と w を s で表せ.

(3) (2) において, s が 1 より大きい実数を動くとき, 点 $\mathrm{R}(-v + \log s\,,\, w)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ.

'18 後期　理系 ❶

n を自然数とする.

(1) 次の等式を示せ.

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$$

(2) $w=\dfrac{10^{n(n+1)}-2^{n+1}}{10^n-2}$ とおく. w は整数であることを示せ. また, w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ.

(3) 実数 x に対し, $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. $\left[\dfrac{10^{n(n+1)}}{10^n-2}\right]$ を 10^n で割った余りを求めよ.

(1)【方針】「全ての自然数に対し」と言えば帰納法

$\underbrace{(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}}_{P(n)}$ とすると,

(i) $(P(1)\text{ 左辺})=(a-b)(a+b)=a^2-b^2=(P(1)\text{ 右辺})$ より $P(1)$ は成り立つ.

(ii) $k\in\mathbb{N}$ に対し, $P(k)$ を仮定して $P(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned}(P(k+1)\text{ 左辺})&=(a-b)(a^{k+1}+a^kb+a^{k-1}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{k-1}+ab^k+b^{k+1})\\&=a(a-b)(a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+\cdots\cdots+a^2b^{k-2}+ab^{k-1})+(a-b)b^{k+1}\\&=a(a^{k+1}-b^{k+1})+(a-b)b^{k+1}\quad(\text{仮定 } P(k) \text{ より})\\&=a^{k+2}-b^{k+2}\\&=(P(k+1)\text{ 右辺})\end{aligned}$$

よって $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$ が成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により $\forall n(n\in\mathbb{N}),\ P(n)$ が示された.

(2) $a=10^n,\ b=2$ とおくと, (1) の結論より

$w=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-1}+b^n$ であり,

この各項は整数なので w は整数であることが示された.

また, $w=a(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})+b^n$ であり,

(　) 内は整数かつ b^n は a より小さい正の整数であることから, w を a で割った余りは b^n であることが示された.

(3) $a=10^n,\ b=2$ とおくと, 求めたいのは $\left[\dfrac{a^{n+1}}{a-b}\right]$ を a で割った余りである.

$\dfrac{a^{n+1}}{a-b}=w+\dfrac{b^{n+1}}{a-b}$ であり, $r=\dfrac{b^{n+1}}{a-b}$ とおくと,

$$\begin{cases}r>0\\1-r=\dfrac{a-b-b^{n+1}}{a-b}>\dfrac{a-b^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\dfrac{10^n-2\cdot2^{n+1}}{10^n-2}=\dfrac{2^n(5^n-4)}{10^n-2}>0\end{cases}$$ より $0<r<1$ なので,

$\left[\dfrac{a^{n+1}}{a-b}\right]=[\,w+r\,]=w$ ((2) より $w\in\mathbb{Z}$ なので) が成り立ち, これを a で割った余りは $\boxed{2^n}$ ((2) より)

'18 後期　理系 ❷

z を虚部が正である複素数とし, O(0), P(2), Q($2z$) を複素数平面上の 3 点とする. △OPR, △PQS, △QOT は △OPQ の内部と重ならない正三角形とし, 3 点 U, V, W をそれぞれ △OPR, △PQS, △QOT の重心とする.

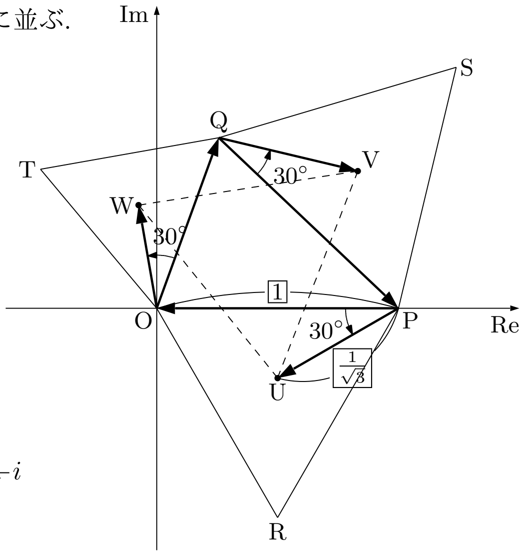
(1) 3 点 U, V, W が表す複素数をそれぞれ z で表せ.

(2) △UVW は正三角形であることを示せ.

(3) z が $|z-i|=\dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき, △UVW の重心 G の軌跡を複素数平面上に図示せよ. ただし, i は虚数単位を表す.

(1) U(u), V(v), W(w) とおく. $\mathrm{Im}(2z)>0$ より, 3 点 O, P, Q は左回りに並ぶ.

よって $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PR}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{PO}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{QS}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\text{を}\end{cases}$ 60° 回転したものとなるので,



$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PU}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{PO}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{QV}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{を}\\ \overrightarrow{\mathrm{OW}}\text{は}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\text{を}\end{cases}$ 30° 回転して $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものである.

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ より

$$u-2=(0-2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) \iff u = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$v-2z=(2-2z)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) \iff v=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z+1+\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$w-0=(2z-0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) \iff w=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z$$

以上より $\boxed{\mathrm{U}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right),\ \mathrm{V}\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z+1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right),\ \mathrm{W}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z\right)}$

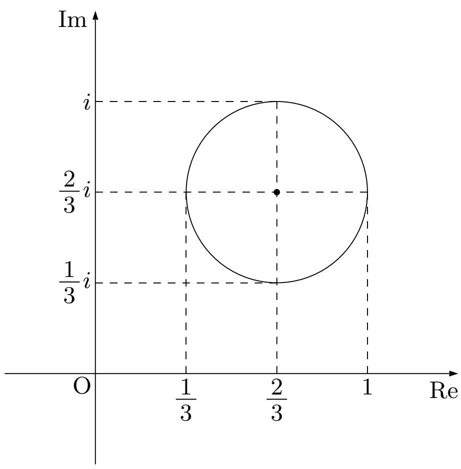
(2)
$$\begin{aligned}(v-u)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) &= \left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z+\frac{2}{\sqrt{3}}i\right\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z-1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\\ &= w-u\end{aligned}$$

より $\overrightarrow{\mathrm{UW}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{UV}}$ を 60° 回転したものなので, △UVW は正三角形である.

(3) G(g) とおくと, $g=\dfrac{u+v+w}{3}=\dfrac{2z+2}{3}$ が成り立つ.

z が $D: |z-i|=\dfrac{1}{2}$ 内を動くときに g が描く図形を C とおくと,

$$\begin{aligned} g\in C &\iff \exists z\,(\in D),\ g=\frac{2}{3}(z+1)\\ &\iff \exists z\left[\,|z-i|=\frac{1}{2}\land z=\frac{3}{2}g-1\right]\\ &\iff \left|\left(\frac{3}{2}g-1\right)-i\right|=\frac{1}{2}\\ &\iff \left|g-\frac{2(1+i)}{3}\right|=\frac{1}{3}\end{aligned}$$



よって $C: \left|g-\dfrac{2(1+i)}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$ であり,

これは点 $\dfrac{2(1+i)}{3}$ を中心とし, $\dfrac{1}{3}$ を半径とする円なので, 図示は右図.

'18 後期　理系 ❸

十分な数の赤球と青玉が手元にあるものとする. a と n を自然数とし, はじめに, 空の袋に a 個の赤玉を入れておく. 以下の試行を繰り返す. 袋の中から玉を 1 個取り出し, それが赤玉ならば青玉を 1 個袋に入れ, 青玉ならば赤玉を 1 個袋に入れる. さらに, 取り出した玉自体も袋に戻し, 袋の中の玉をよくかき混ぜる. 結果として, 1 回の試行ごとに袋の中にある玉は 1 個ずつ増える. この試行を繰り返したとき, n 回目の施行後に袋に入っている赤玉の個数が k である確率を $p_n(k)$ で表す. 例えば, $p_1(k)$ の値は k が a のとき 1, そのほかの場合は 0 である. また, $M_n = \sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k)$ とする.

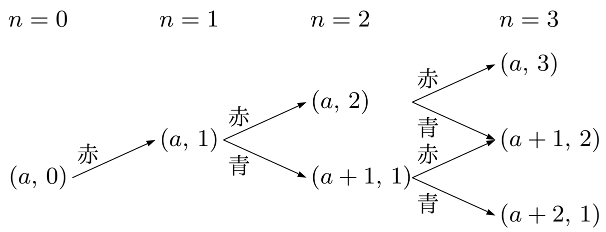
(1) $p_2(k)$ を求めよ.

(2) $p_{n+1}(k+1) = Bp_n(k) + Cp_n(k+1)$ と表すとき, B と C を $a,\ k,\ n$ で表せ.

(3) $M_1 = a,\quad M_{n+1} = \dfrac{a+n-1}{a+n}M_n + 1$ を示せ.

(4) (3) の式を満たす数列 $\{M_n\}$ の一般項を求めよ. さらに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}$ を求めよ.

(赤の個数, 青の個数) とすると, 何色を取り出すかと, その結果の玉の個数の推移は右図のようになる.



1 回目のとき玉の総数は $a+1$ 個なので,

$$p_1(k) = \begin{cases} 1 & (k=a\text{ のとき}) \\ 0 & (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a-1,\ a+1\text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots ①$$

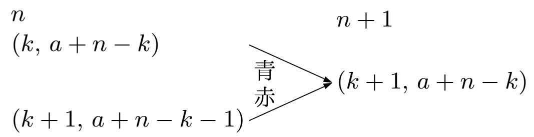
(1) 2 回目のとき玉の総数は $a+2$ 個なので,

$$\boxed{p_2(k) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+1} & (k=a\text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{a+1} & (k=a+1\text{ のとき}) \\ 0 & (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a-1,\ a+2\text{ のとき}) \end{cases}}$$

(2) n 回目のとき玉の総数は $a+n$ 個なので, $\begin{cases} \text{赤が } k & (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n) \text{ 個のとき青は } a+n-k \text{ 個} \\ \text{赤が } k+1 & (k=-1,\ 0,\ \cdots,\ a+n-1) \text{ 個のとき青は } a+n-k-1 \text{ 個} \end{cases}$

よって, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n-1$ に対し,

$n+1$ 回目に赤が $k+1$ 個となる推移は右図のようになるので,



$$p_{n+1}(k+1) = \frac{a+n-k}{a+n}p_n(k) + \frac{k+1}{a+n}p_n(k+1) \cdots ②$$

以上より $\boxed{(B,\ C) = \left(\dfrac{a+n-k}{a+n},\ \dfrac{k+1}{a+n}\right)}$

(3) $M_1 = \sum_{k=0}^{a+1} kp_1(k) = 0\underbrace{p_1(0)}_{0} + 1\underbrace{p_1(1)}_{0} + \cdots + (a-1)\underbrace{p_1(a-1)}_{0} + a\underbrace{p_1(a)}_{1} + (a+1)\underbrace{p_1(a+1)}_{0} = a$　(①より)

$$\begin{aligned}
&② \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n-1) \\
&\iff (k+1)p_{n+1}(k+1) = \frac{k+1}{a+n}\{(a+n-k)p_n(k) + (k+1)p_n(k+1)\}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ a+n-1) \\
&\implies \sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)p_{n+1}(k+1) = \frac{1}{a+n}\left\{\sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)(a+n-k)p_n(k) + \sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)^2p_n(k+1)\right\} \\
&\iff \sum_{i=1}^{a+n} ip_{n+1}(i) = \frac{1}{a+n}\left\{\sum_{k=0}^{a+n-1}(k+1)(a+n-k)p_n(k) + \sum_{i=1}^{a+n} i^2p_n(i)\right\} \\
&\iff \sum_{k=0}^{a+n+1} kp_{n+1}(k) - 0p_{n+1}(0) - (a+n+1)\underbrace{p_{n+1}(a+n+1)}_{0} \\
&\qquad = \frac{1}{a+n}\left\{\sum_{k=0}^{a+n}(k+1)(a+n-k)p_n(k) - (a+n+1)0p_n(a+n) + \sum_{k=0}^{a+n} k^2p_n(k) - 0^2p_n(0)\right\} \\
&\iff \sum_{k=0}^{a+n+1} kp_{n+1}(k) = \frac{1}{a+n}\left\{(a+n-1)\sum_{k=0}^{a+n} kp_n(k) + (a+n)\sum_{k=0}^{a+n} p_n(k)\right\} \\
&\iff M_{n+1} = \frac{a+n-1}{a+n}M_n + 1 \quad (n \geqq 1) \cdots ③
\end{aligned}$$

'18 後期　理系 ❸

(4) ③ $\Longleftrightarrow (a+n)M_{n+1}-(a+n-1)M_n=a+n \quad (n \geqq 1)$ なので, $n \geqq 2$ において

$$\sum_{j=1}^{n-1}\{(a+j)M_{j+1}-(a+j-1)M_j\}=\sum_{j=1}^{n-1}(a+j) \Longleftrightarrow (a+n-1)M_n-aM_1=\frac{\{(a+1)+(a+n-1)\}(n-1)}{2}$$
$$\Longleftrightarrow (a+n-1)M_n=a^2+\frac{(n+2a)(n-1)}{2}$$
$$\Longleftrightarrow M_n=a+\frac{n(n-1)}{2(a+n-1)}$$

これは $n=1$ のときも正しく M_n を表しているので $\boxed{M_n=a+\frac{n(n-1)}{2(a+n-1)} \ (n \geqq 1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{n}+\frac{1-\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{a-1}{n}\right)}\right\}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

【考察】

M_n は n 回後の赤玉の個数の期待値です.
このとき玉の総数は $a+n$ ですから $\frac{M_n}{a+n}$ は赤玉の比率の平均です.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{a+n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{a+n}+\frac{1-\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{a-1}{n}\right)\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right\}=\frac{1}{2}$$

よりこの試行を繰り返していくと赤玉と青玉の比率の平均は等しくなります.
十分大きな n では $a+n$ で割ることと n で割ることはほとんど同じとみなせるので $\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}$ も同じく赤玉の比率を表していると言えます.

'18 後期　理系 ❹

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とし, 曲線 $y=f(x)$ を C とする. また, $s>1$ とし, $0\leqq x\leqq \log s$ の範囲における C の長さを $L(s)$ とする. ただし, $\log s$ は s の自然対数であり, e は自然対数の底である.

(1) $L(s)$ を s で表せ.

(2) P を x 座標が $\log s$ であるような C 上の点とし, この点での C の接線を l とする. $\mathrm{Q}(v,\, w)$ を $v<\log s$ かつ $\mathrm{PQ}=L(s)$ を満たす l 上の点とするとき, v と w を s で表せ.

(3) (2) において, s が 1 より大きい実数を動くとき, 点 $\mathrm{R}(-v+\log s,\, w)$ の軌跡を座標平面上に図示せよ.

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ より

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}=\frac{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad (e^x+e^{-x}>0 \text{ より}) \text{ なので,}$$

$$L(s)=\int_0^{\log s}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^{\log s}=\frac{1}{2}(s-s^{-1})-\frac{1}{2}(1-1)$$

よって $\boxed{L(s)=\dfrac{1}{2}\left(s-\dfrac{1}{s}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $-\begin{pmatrix}1\\ f'(\log s)\end{pmatrix}$ 向きで大きさが $L(s)$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{L(s)}{\sqrt{1+(f'(\log s))^2}}\begin{pmatrix}1\\ f'(\log s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log s\\ \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}{\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\end{pmatrix}$$

よって

$$v=\boxed{\log s-\frac{s-\frac{1}{s}}{s+\frac{1}{s}}}$$

$$w=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(s-\frac{1}{s}\right)^2}{s+\frac{1}{s}}=\frac{1}{2\left(s+\frac{1}{s}\right)}\left\{\left(s+\frac{1}{s}\right)^2-\left(s-\frac{1}{s}\right)^2\right\}=\boxed{\frac{2}{s+\frac{1}{s}}}$$

(3) $\mathrm{R}(x\,,\,y)$ とおく.

s が $s>1$ を満たして動くときに R が描く図形を W とおくと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(x,\,y)\in W &\iff \exists s\,(>1),\ (x,\,y)=(-v+\log s,\, w)\\
&\iff \exists s\,(>1)\left[x=\frac{s-\frac{1}{s}}{s+\frac{1}{s}}\wedge y=\frac{2}{s+\frac{1}{s}}\right]\\
&\iff \exists s\,(>1)\left[s+\frac{1}{s}=\frac{2}{y}\wedge s-\frac{1}{s}=\frac{2x}{y}\right]\\
&\iff \exists s\,(>1)\left[s=\frac{1+x}{y}\wedge \frac{1}{s}=\frac{1-x}{y}\right]\\
&\iff \frac{1+x}{y}\cdot\frac{1-x}{y}=1\wedge\frac{1+x}{y}>1\\
&\iff x^2+y^2=1\wedge\frac{x-y+1}{y}>0
\end{aligned}$$

よって $W: x^2+y^2=1\wedge\dfrac{x-y+1}{y}>0$ なので, 図示は右図実線部.