’17 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

$a,\ b$ を実数とし, 放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく. また, 直線 $y=x-1$ を l とおく. Q と l は共有点を持たないか, あるいは 1 点で接しているとする.

(1) $a,\ b$ の満たす条件を求めよ.

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく. また, Q 上の点 B における Q の接線は, 点 C において l と垂直に交わっているとする. このとき, 3 点 A, B, C の座標を $a,\ b$ を用いて表せ.

(3) $a,\ b$ がさらに条件

$$a \geqq 0,\ b \leqq 2,\ b \leqq 2a+1$$

を満たすとき, (2) で求めた 3 点を頂点とする △ABC の面積の最大値と最小値を求めよ.

’17 後期 理系 ❹

$a,\ b$ を実数とし, 放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく. また, 直線 $y=x-1$ を l とおく. Q と l は共有点を持たないか, あるいは 1 点で接しているとする.

(1) $a,\ b$ の満たす条件を求めよ.

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく. また, Q 上の点 B における Q の接線は, 点 C において l と垂直に交わっているとする. このとき, 3 点 A, B, C の座標を $a,\ b$ を用いて表せ.

(3) $a,\ b$ がさらに条件

$$a \geqq 0,\ b \leqq 2,\ b \leqq 2a+1$$

を満たすとき, (2) で求めた 3 点を頂点とする $\triangle$ABC の面積の最大値と最小値を求めよ.

$Q: y=x^2-2ax+a^2+b\ (a,\ b\in\mathbb{R}),\ \ l: y=x-1$

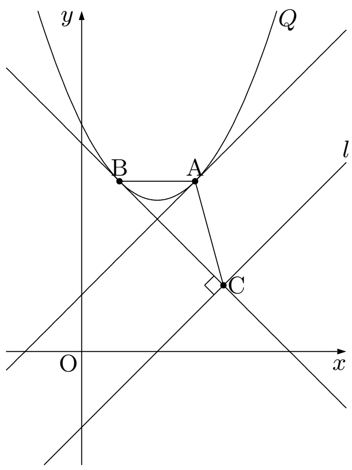
(1) Q と l の共有点が 1 点以下 $\iff x^2+(-2a-1)x+a^2+b+1=0$ の実数解が 1 個以下

$\iff$ (判別式) $=(-2a-1)^2-4(a^2+b+1)\leqq 0$

$\iff 4a-4b-3\leqq 0$

$\iff \boxed{b\geqq a-\dfrac{3}{4}}$

(2) Q 上に点 P をとると, P と l の最短距離は P から l に下した垂線の長さ d であり, Q は下に凸なので, d が最小になるのは P が l と平行な Q の接線の接点と一致するときである. よってこの接点が A である.



Q について $y'=2x-2a$ であり,

l と平行な接線の傾きは 1 なので,

A の x 座標は $1=2x-2a \iff x=a+\dfrac{1}{2}$ より $\boxed{\mathrm{A}\left(a+\dfrac{1}{2}\,,\,b+\dfrac{1}{4}\right)}$

l と垂直な接線の傾きは -1 なので,

B の x 座標は $-1=2x-2a \iff x=a-\dfrac{1}{2}$ より $\boxed{\mathrm{B}\left(a-\dfrac{1}{2}\,,\,b+\dfrac{1}{4}\right)}$

また, この接線の式は $y=-x+a+b-\dfrac{1}{4}$ なので,

C の座標は

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+a+b-\dfrac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{3}{8} \\ y=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8} \end{cases} \text{ より } \boxed{\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{3}{8}\,,\,\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8}\right)}$$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\times(\mathrm{C}\ \text{と}\ \mathrm{AB}\ \text{の距離})=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left\{\left(b+\dfrac{1}{4}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8}\right)\right\}=\dfrac{-a+b}{4}+\dfrac{7}{16}.$

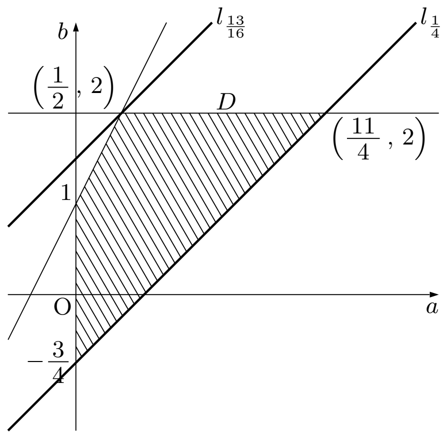
$D: b\geqq a-\dfrac{3}{4}\wedge a\geqq 0\wedge b\leqq 2\wedge b\leqq 2a+1$ とおく.

点 $(a\,,\,b)$ が D 内を動くときの $\triangle$ABC がとる値の範囲を W とおくと,

$k\in W \iff \exists(a,\,b)\,(\in D),\ k=\dfrac{-a+b}{4}+\dfrac{7}{16}$

$\iff$ 直線 $l_k: b=a+4k-\dfrac{7}{4}$ と D が共有点を持つ

$\iff \dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{13}{16}$ (右図より)



よって $W: \dfrac{1}{4}\leqq\triangle\mathrm{ABC}\leqq\dfrac{13}{16}$ なので,

$\boxed{\text{最大値は }\dfrac{13}{16},\ \text{最小値は }\dfrac{1}{4}}$