'17 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

実数 c に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める.

(1) $c \geqq 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ. さらに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $c < 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ.

'17 後期　理系　❸

実数 c に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|\,a_n\,| + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \cdots ①$$

によって定める.

(1) $c \geqq 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ. さらに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $c < 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ.

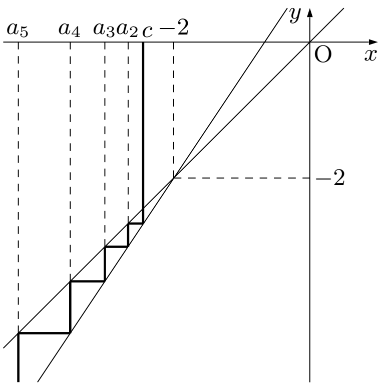
思考

$f(x) = x - \frac{1}{2}|\,x\,| + 1$ とおくと, $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n \geqq 1)$ であり,

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x + 1 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

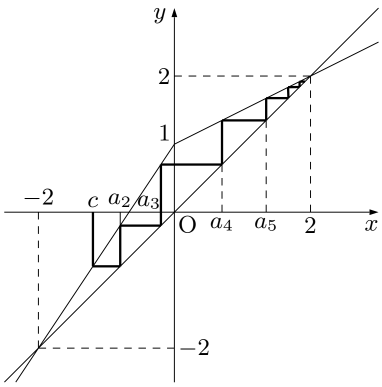
と $y = x$ のグラフを利用することにより, $\{a_n\}$ の増減や極限は捉えられる.

(I) $c < -2$ のとき



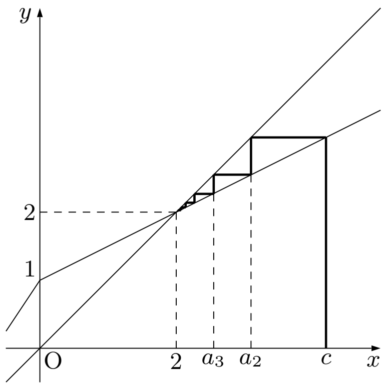
単調減少で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ だろう.

(II) $-2 < c < 2$ のとき



単調増加で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ だろう.

(III) $2 < c$ のとき



単調減少で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ だろう.

また $c = \pm 2$ のときは定数列になるので, 結果だけなら (2) は $c \leqq -2$, (3) は $-2 \leqq c$ であることがわかる.
これが見えていることにより, 解答の最適な場合分けを選ぶことができる.

(1) $c \geqq 0$

$\boxed{\forall n\,(\in \mathbb{N}),\ \underline{a_n \geqq 0}_{P(n)}} \cdots ☆$ を示す.

(i) $a_1 = c \geqq 0$ より $P(1)$ は成り立つ.

(ii) $k \in \mathbb{N}$ に対し, $P(k)$ を仮定して $P(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k - \frac{1}{2}|\,a_k\,| + 1 \quad (①より) \\ &= \frac{1}{2}a_k + 1 \quad (\text{仮定 } P(k) \text{ より}) \\ &\geqq 1 \quad (\text{仮定 } P(k) \text{ より}) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

よって $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ は成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により ☆ は示された.

続いて ☆ より

$$① \Longleftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \Longleftrightarrow a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

よって数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = c - 2$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので,

$$a_n - 2 = (c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Longleftrightarrow \boxed{a_n = 2 + (c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 1)}$$

'17 後期　理系 ❸

(2) $c<0$

$\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0$ の必要十分条件を求める.

(I) $c\leqq -2$ のとき

$\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ \underline{a_n\leqq -2}_{Q(n)}$ を示す.

(i) $a_1=c\leqq -2$ より $Q(1)$ は成り立つ.

(ii) $k\in\mathbb{N}$ に対し, $Q(k)$ を仮定して $Q(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k-\frac{1}{2}|a_k|+1 \quad (①\text{より})\\&=\frac{3}{2}a_k+1 \quad (\text{仮定 } Q(k) \text{ より})\\&\leqq\frac{3}{2}(-2)+1 \quad (\text{仮定 } Q(k) \text{ より})\\&=-2\end{aligned}$$

よって $Q(k)\Longrightarrow Q(k+1)$ は成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ Q(n)$ は示された.

(II) $-2<c<0$ のとき

$\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0$ を示す.

$\overline{\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0}\Longleftrightarrow\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0$ と仮定すると

① $\Longleftrightarrow a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1\Longleftrightarrow a_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}(a_n+2)\quad(n\geqq 1)$

よって数列 $\{a_n+2\}$ は初項 $a_1+2=c+2$, 公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列なので,

$a_n+2=(c+2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\Longleftrightarrow a_n=-2+(c+2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\quad(n\geqq 1)$

すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ ($c+2>0$ より) となるが, これは $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0$ に矛盾する.

よって, $\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0$ が示された.

(I), (II) より $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0\Longleftrightarrow\boxed{c\leqq -2}$

(3) (A) $c<-2$ のとき

(2)(I) より $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1\quad(n\geqq 1)$ なので, (2)(II) と同様に $a_n=-2+(c+2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\quad(n\geqq 1)$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty\quad(c+2<0$ より$)$

(B) $c=-2$ のとき

(2)(I) より $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1\quad(n\geqq 1)$ なので, (2)(II) と同様に $a_n=-2\quad(n\geqq 1)$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-2$

(C) $c>-2$ のとき

(2)(II) より $\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0$ であり, $a_N\geqq 0$ とすると, (1) より $\forall n\,(n\geqq N),\ a_n\geqq 0$ なので,

① $\Longleftrightarrow a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)\Longrightarrow|a_{n+1}-2|=\dfrac{1}{2}|a_n-2|\ (n\geqq N)$

よって $|a_n-2|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N}|a_N-2|\ (n\geqq N)$ であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}|a_N-2|=0$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

(A), (B), (C) より, $\{a_n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow\boxed{c\geqq -2}$