'17 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

n を自然数とする.

(1) 二項定理を用いて $(z+z^{-1})^{2n}$ を展開せよ. ただし, z は 0 でない複素数とする.

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき, (1) の展開式を用いて, 等式

$$(2\cos\theta)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\cdots{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)$$

が成り立つことを示せ. ただし, i は虚数単位である.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

'17 後期　理系 ❷

n を自然数とする.

(1) 二項定理を用いて $(z+z^{-1})^{2n}$ を展開せよ. ただし, z は 0 でない複素数とする.

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき, (1) の展開式を用いて, 等式

$$(2\cos\theta)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\cdots{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)$$

が成り立つことを示せ. ただし, i は虚数単位である.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

(1) $$\begin{aligned}(z+z^{-1})^{2n}&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2n-k}(z^{-1})^k\\&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2n-2k}\\&=\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_0z^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1z^{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_2z^{2n-4}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_nz^0+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}z^{-2n+2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}z^{-2n}}\end{aligned}$$

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと,

$$(z+z^{-1})^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_kz^{2n-2k}$$

$$\iff\{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\}^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n-2k}$$

$$\iff\{\cos\theta+i\sin\theta+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\{\cos(2(n-k)\theta)+i\sin(2(n-k)\theta)\}\quad\text{（ド・モアブルの定理より）}$$

$$\iff(2\cos\theta)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)\quad(2(n-k)\in\mathbb{Z}\text{ より})\cdots\text{①}$$

$$\iff(2\cos\theta)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\cdots{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)$$

(3) ① の両辺を θ について 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで積分すると,

$$\text{①}\Longrightarrow2^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n-k)\theta)d\theta\cdots\text{②}\text{ であり,}$$

$$\begin{aligned}(\text{②右辺})&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n-k)\theta)d\theta+{}_{2n}\mathrm{C}_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos0d\theta+\sum_{k=n+1}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n-k)\theta)d\theta\\&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left[\frac{\sin(2(n-k)\theta)}{2(n-k)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+{}_{2n}\mathrm{C}_n\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\sum_{k=n+1}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left[\frac{\sin(2(n-k)\theta)}{2(n-k)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2n)!\pi}{2(n!)^2}\end{aligned}$$

以上より, ② $\iff\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ が示された.