’17 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日　名前

3 辺の長さが 5, 6, 7 の三角形を T とする.

(1) T の面積を求めよ.

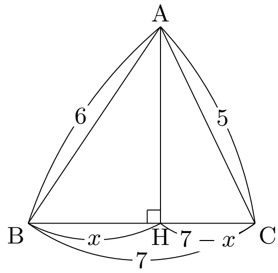
(2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ. ただし, 直三角柱とは, すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である.

'17 後期 理系 ❶

3 辺の長さが 5, 6, 7 の三角形を T とする.

(1) T の面積を求めよ.

(2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ. ただし, 直三角柱とは, すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である.



(1) T の頂点を右図のようにおく.

CA $<$ AB $<$ BC より $\angle$B $<$ $\angle$C $<$ $\angle$A なので, 少なくとも $\angle$B と $\angle$C は鋭角.

よって A から BC に下ろした垂線の足を H とし, BH $= x$ とおくと,

H は辺 BC の内分点なので CH $= 7 - x$ となる.

すると $\begin{cases} \mathrm{AH}^2 = 6^2 - x^2 \\ \mathrm{AH}^2 = 5^2 - (7-x)^2 \end{cases}$ より,

$6^2 - 5^2 = (7-x)^2 - x^2 \iff 11 = 7(7-2x) \iff x = \dfrac{30}{7}$

よって $\mathrm{AH} = \sqrt{6^2 - \left(\dfrac{30}{7}\right)} = \dfrac{6}{7}\sqrt{7^2 - 5^2} = \dfrac{6}{7}\sqrt{12 \cdot 2} = \dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ となるので,

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot \dfrac{12\sqrt{6}}{7} = \boxed{6\sqrt{6}}$

【別解】3 辺の長さが有理数のときはヘロンの公式が有効

ヘロンの公式

3 辺が a, b, c である三角形の面積を S とすると, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (ただし, $2s = a + b + c$)

$2s = 5 + 6 + 7 \iff s = 9$ より (T の面積) $= \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \boxed{6\sqrt{6}}$

(2) 求める半径の最大値は, 上下の底面に接する球の半径 r_1 と 3 側面に内部で接する球の半径 r_2 のうちの小さいほうである.

まず, 三角柱の高さが 4 なので $r_1 = 2$

次に, r_2 は T の内接円の半径に等しく, (T の面積) $= \dfrac{1}{2}r_2(5+6+7) \iff 6\sqrt{6} = 9r_2 \iff r_2 = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$r_1 = \dfrac{6}{3} = \dfrac{2\sqrt{9}}{3} > \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = r_2$ より求める半径は $\boxed{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$