'17 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日　名前

3 辺の長さが 5, 6, 7 の三角形を T とする.

(1) T の面積を求めよ.

(2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ. ただし, 直三角柱とは, すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である.

’17 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

n を自然数とする.

(1) 二項定理を用いて $(z+z^{-1})^{2n}$ を展開せよ. ただし, z は 0 でない複素数とする.

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき, (1) の展開式を用いて, 等式

$$(2\cos\theta)^{2n} = {}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta) + {}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta) + \cdots\cdots {}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta) + \cdots\cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)$$

が成り立つことを示せ. ただし, i は虚数単位である.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

’17 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

実数 c に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|\,a_n\,| + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める.

(1) $c \geqq 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ. さらに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $c < 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ.

’17 後期　理系 ❹　　　　　　　　　　提出　　　年　　月　　日 名前

$a,\ b$ を実数とし, 放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく. また, 直線 $y=x-1$ を l とおく. Q と l は共有点を持たないか, あるいは 1 点で接しているとする.

(1) $a,\ b$ の満たす条件を求めよ.

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく. また, Q 上の点 B における Q の接線は, 点 C において l と垂直に交わっているとする. このとき, 3 点 A, B, C の座標を $a,\ b$ を用いて表せ.

(3) $a,\ b$ がさらに条件

$$a \geqq 0,\ b \leqq 2,\ b \leqq 2a+1$$

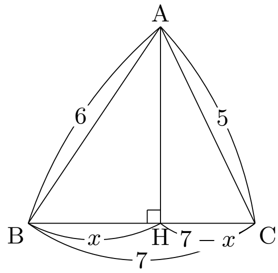
を満たすとき, (2) で求めた 3 点を頂点とする △ABC の面積の最大値と最小値を求めよ.

'17 後期 理系 ❶

3 辺の長さが 5, 6, 7 の三角形を T とする.

(1) T の面積を求めよ.

(2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ. ただし, 直三角柱とは, すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である.



(1) T の頂点を右図のようにおく.

CA $<$ AB $<$ BC より $\angle$B $<$ $\angle$C $<$ $\angle$A なので, 少なくとも $\angle$B と $\angle$C は鋭角.

よって A から BC に下ろした垂線の足を H とし, BH $= x$ とおくと,

H は辺 BC の内分点なので CH $= 7 - x$ となる.

すると $\begin{cases} \mathrm{AH}^2 = 6^2 - x^2 \\ \mathrm{AH}^2 = 5^2 - (7-x)^2 \end{cases}$ より,

$6^2 - 5^2 = (7-x)^2 - x^2 \iff 11 = 7(7-2x) \iff x = \dfrac{30}{7}$

よって $\mathrm{AH} = \sqrt{6^2 - \left(\dfrac{30}{7}\right)} = \dfrac{6}{7}\sqrt{7^2 - 5^2} = \dfrac{6}{7}\sqrt{12 \cdot 2} = \dfrac{12\sqrt{6}}{7}$ となるので,

$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot \dfrac{12\sqrt{6}}{7} = \boxed{6\sqrt{6}}$

【別解】3 辺の長さが有理数のときはヘロンの公式が有効

ヘロンの公式

3 辺が $a,\ b,\ c$ である三角形の面積を S とすると, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (ただし, $2s = a + b + c$)

$2s = 5 + 6 + 7 \iff s = 9$ より (T の面積) $= \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \boxed{6\sqrt{6}}$

(2) 求める半径の最大値は, 上下の底面に接する球の半径 r_1 と 3 側面に内部で接する球の半径 r_2 のうちの小さいほうである.

まず, 三角柱の高さが 4 なので $r_1 = 2$

次に, r_2 は T の内接円の半径に等しく, (T の面積) $= \dfrac{1}{2}r_2(5+6+7) \iff 6\sqrt{6} = 9r_2 \iff r_2 = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$r_1 = \dfrac{6}{3} = \dfrac{2\sqrt{9}}{3} > \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = r_2$ より求める半径は $\boxed{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

'17 後期　理系 ❷

n を自然数とする.
(1) 二項定理を用いて $(z+z^{-1})^{2n}$ を展開せよ. ただし, z は 0 でない複素数とする.
(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき, (1) の展開式を用いて, 等式

$$(2\cos\theta)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\cdots{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)$$

が成り立つことを示せ. ただし, i は虚数単位である.
(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

(1)
$$\begin{aligned}(z+z^{-1})^{2n}&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k z^{2n-k}(z^{-1})^k\\&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k z^{2n-2k}\\&=\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_0z^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1z^{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_2z^{2n-4}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_nz^0+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}z^{-2n+2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}z^{-2n}}\end{aligned}$$

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと,

$$(z+z^{-1})^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k z^{2n-2k}$$

$$\Longleftrightarrow\{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\}^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n-2k}$$

$$\Longleftrightarrow\{\cos\theta+i\sin\theta+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\{\cos(2(n-k)\theta)+i\sin(2(n-k)\theta)\}\quad(\text{ド・モアブルの定理より})$$

$$\Longleftrightarrow(2\cos\theta)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)\quad(2(n-k)\in\mathbb{Z}\text{ より})\cdots①$$

$$\Longleftrightarrow(2\cos\theta)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0\cos(2n\theta)+{}_{2n}\mathrm{C}_1\cos(2(n-1)\theta)+\cdots\cdots{}_{2n}\mathrm{C}_k\cos(2(n-k)\theta)+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\cos(-2n\theta)$$

(3) ① の両辺を θ について 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで積分すると,

$$①\Longrightarrow 2^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n-k)\theta)d\theta\cdots②\text{ であり},$$

$$\begin{aligned}(②\text{右辺})&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n-k)\theta)d\theta+{}_{2n}\mathrm{C}_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 0d\theta+\sum_{k=n+1}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n-k)\theta)d\theta\\&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left[\frac{\sin(2(n-k)\theta)}{2(n-k)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+{}_{2n}\mathrm{C}_n\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\sum_{k=n+1}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\left[\frac{\sin(2(n-k)\theta)}{2(n-k)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2n)!\pi}{2(n!)^2}\end{aligned}$$

以上より, $② \Longleftrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ が示された.

'17 後期　理系　❸

実数 c に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\cdots①$$

によって定める.

(1) $c \geqq 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n \geqq 0$ が成り立つことを示せ. さらに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $c < 0$ とする. このとき, すべての n に対して $a_n < 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ.

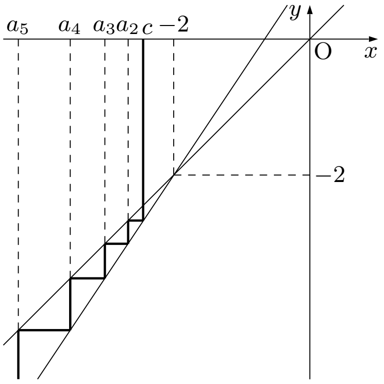
(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ.

思考

$f(x) = x - \dfrac{1}{2}|x| + 1$ とおくと, $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n \geqq 1)$ であり,

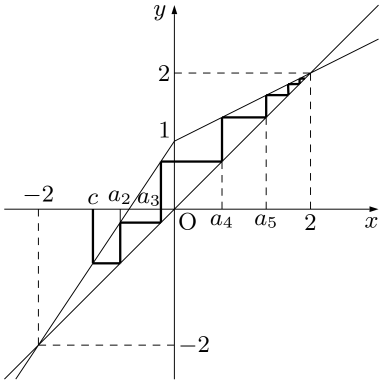
$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x + 1 \ (x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}x + 1 \ (x \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$　と $y = x$ のグラフを利用することにより, $\{a_n\}$ の増減や極限は捉えられる.

(I)　$c < -2$ のとき



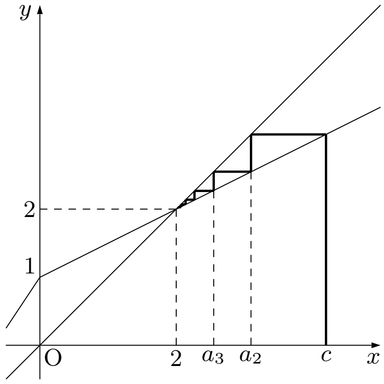
単調減少で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ だろう.

(II)　$-2 < c < 2$ のとき



単調増加で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ だろう.

(III)　$2 < c$ のとき



単調減少で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ だろう.

また $c = \pm 2$ のときは定数列になるので, 結果だけなら (2) は $c \leqq -2$, (3) は $-2 \leqq c$ であることがわかる.
これが見えていることにより, 解答の最適な場合分けを選ぶことができる.

(1) $c \geqq 0$

$\boxed{\forall n\,(\in \mathbb{N}),\ \underline{a_n \geqq 0}_{P(n)}}\cdots☆$ を示す.

(i) $a_1 = c \geqq 0$ より $P(1)$ は成り立つ.

(ii) $k \in \mathbb{N}$ に対し, $P(k)$ を仮定して $P(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k - \frac{1}{2}|a_k| + 1 \quad (①\text{より}) \\ &= \frac{1}{2}a_k + 1 \quad (\text{仮定 } P(k) \text{ より}) \\ &\geqq 1 \quad (\text{仮定 } P(k) \text{ より}) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

よって $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ は成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により ☆ は示された.
続いて ☆ より

$$① \Longleftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \Longleftrightarrow a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

よって数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = c - 2$, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列なので,

$$a_n - 2 = (c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Longleftrightarrow \boxed{a_n = 2 + (c-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 1)}$$

'17 後期　理系 ❸

(2) $c<0$

$\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0$ の必要十分条件を求める.

(I) $c\leqq -2$ のとき

$\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ \underline{a_n\leqq -2}_{Q(n)}$ を示す.

(i) $a_1=c\leqq -2$ より $Q(1)$ は成り立つ.

(ii) $k\in\mathbb{N}$ に対し, $Q(k)$ を仮定して $Q(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k-\frac{1}{2}|a_k|+1 \quad (①より)\\ &= \frac{3}{2}a_k+1 \quad (仮定\,Q(k)\,より)\\ &\leqq \frac{3}{2}(-2)+1 \quad (仮定\,Q(k)\,より)\\ &= -2 \end{aligned}$$

よって $Q(k)\Longrightarrow Q(k+1)$ は成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ Q(n)$ は示された.

(II) $-2<c<0$ のとき

$\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0$ を示す.

$\overline{\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0}\Longleftrightarrow \forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0$ と仮定すると

① $\Longleftrightarrow a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1\Longleftrightarrow a_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}(a_n+2)\quad (n\geqq 1)$

よって数列 $\{a_n+2\}$ は初項 $a_1+2=c+2$, 公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列なので,

$a_n+2=(c+2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\Longleftrightarrow a_n=-2+(c+2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\quad (n\geqq 1)$

すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ $(c+2>0$ より$)$ となるが, これは $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0$ に矛盾する.

よって, $\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0$ が示された.

(I), (II) より $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n<0\Longleftrightarrow \boxed{c\leqq -2}$

(3) (A) $c<-2$ のとき

(2)(I) より $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1\quad (n\geqq 1)$ なので, (2)(II) と同様に $a_n=-2+(c+2)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\quad (n\geqq 1)$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty\quad (c+2<0$ より$)$

(B) $c=-2$ のとき

(2)(I) より $a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+1\quad (n\geqq 1)$ なので, (2)(II) と同様に $a_n=-2\quad (n\geqq 1)$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-2$

(C) $c>-2$ のとき

(2)(II) より $\exists n\,(\in\mathbb{N}),\ a_n\geqq 0$ であり, $a_N\geqq 0$ とすると, (1) より $\forall n\,(n\geqq N),\ a_n\geqq 0$ なので,

① $\Longleftrightarrow a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)\Longrightarrow |a_{n+1}-2|=\dfrac{1}{2}|a_n-2|\ (n\geqq N)$

よって $|a_n-2|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N}|a_N-2|\ (n\geqq N)$ であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}|a_N-2|=0$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

(A), (B), (C) より, $\{a_n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow \boxed{c\geqq -2}$

'17 後期　理系 ❹

$a,\ b$ を実数とし, 放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく. また, 直線 $y=x-1$ を l とおく. Q と l は共有点を持たないか, あるいは 1 点で接しているとする.

(1) $a,\ b$ の満たす条件を求めよ.

(2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とおく. また, Q 上の点 B における Q の接線は, 点 C において l と垂直に交わっているとする. このとき, 3 点 A, B, C の座標を $a,\ b$ を用いて表せ.

(3) $a,\ b$ がさらに条件

$$a \geqq 0,\ b \leqq 2,\ b \leqq 2a+1$$

を満たすとき, (2) で求めた 3 点を頂点とする △ABC の面積の最大値と最小値を求めよ.

$Q: y=x^2-2ax+a^2+b\ (a,\ b\in\mathbb{R}),\ \ l: y=x-1$

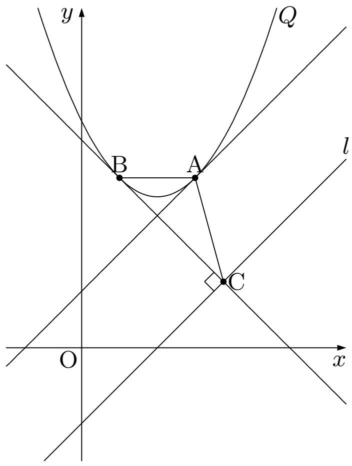
(1) Q と l の共有点が 1 点以下 $\iff x^2+(-2a-1)x+a^2+b+1=0$ の実数解が 1 個以下

$\iff$ (判別式) $=(-2a-1)^2-4(a^2+b+1)\leqq 0$

$\iff 4a-4b-3\leqq 0$

$\iff \boxed{b\geqq a-\dfrac{3}{4}}$

(2) Q 上に点 P をとると, P と l の最短距離は P から l に下した垂線の長さ d であり, Q は下に凸なので, d が最小になるのは P が l と平行な Q の接線の接点と一致するときである. よってこの接点が A である.



Q について $y'=2x-2a$ であり,

l と平行な接線の傾きは 1 なので,

A の x 座標は $1=2x-2a \iff x=a+\dfrac{1}{2}$ より $\boxed{\mathrm{A}\left(a+\dfrac{1}{2},\, b+\dfrac{1}{4}\right)}$

l と垂直な接線の傾きは -1 なので,

B の x 座標は $-1=2x-2a \iff x=a-\dfrac{1}{2}$ より $\boxed{\mathrm{B}\left(a-\dfrac{1}{2},\, b+\dfrac{1}{4}\right)}$

また, この接線の式は $y=-x+a+b-\dfrac{1}{4}$ なので,

C の座標は

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+a+b-\dfrac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{3}{8} \\ y=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8} \end{cases} \text{ より } \boxed{\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{3}{8},\, \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8}\right)}$$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\times(\mathrm{C}\text{ と AB の距離})=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left\{\left(b+\dfrac{1}{4}\right)-\left(\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{5}{8}\right)\right\}=\dfrac{-a+b}{4}+\dfrac{7}{16}.$

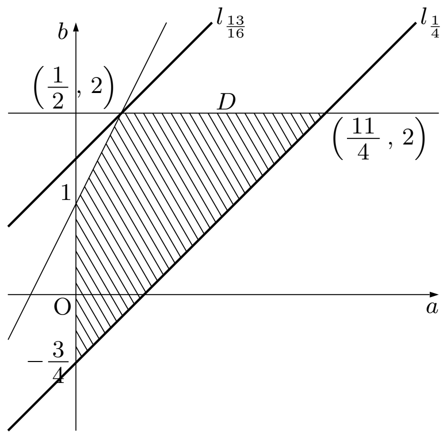
$D: b\geqq a-\dfrac{3}{4}\wedge a\geqq 0\wedge b\leqq 2\wedge b\leqq 2a+1$ とおく.

点 $(a,\,b)$ が D 内を動くときの △ABC がとる値の範囲を W とおくと,

$k\in W \iff \exists(a,\,b)\,(\in D),\ k=\dfrac{-a+b}{4}+\dfrac{7}{16}$

$\iff$ 直線 $l_k: b=a+4k-\dfrac{7}{4}$ と D が共有点を持つ

$\iff \dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{13}{16}$　(右図より)



よって $W: \dfrac{1}{4}\leqq\triangle\mathrm{ABC}\leqq\dfrac{13}{16}$ なので,

$\boxed{\text{最大値は }\dfrac{13}{16},\ \text{最小値は }\dfrac{1}{4}}$