'16 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日　名前

自然数 n に対して

$$a_n = (1+\sqrt{2}\,)^n + (1-\sqrt{2}\,)^n$$

とおく.

(1) a_1, a_2 を求め,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ.

(2) a_{13} と a_{14} の 1 の位の数をそれぞれ求めよ.

(3) $[\,(1+\sqrt{2}\,)^{1000}\,]$ の 1 の位の数を求めよ. ただし, 実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. たとえば $[\,1+\sqrt{2}\,] = 2$ である.

'16 後期　理系 ❹

自然数 n に対して

$$a_n = (1+\sqrt{2}\,)^n + (1-\sqrt{2}\,)^n$$

とおく.

(1) $a_1,\ a_2$ を求め,
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
が成り立つことを示せ.

(2) a_{13} と a_{14} の 1 の位の数をそれぞれ求めよ.

(3) $[\,(1+\sqrt{2}\,)^{1000}\,]$ の 1 の位の数を求めよ. ただし, 実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. たとえば $[\,1+\sqrt{2}\,] = 2$ である.

(1) $\alpha = 1-\sqrt{2}\,,\ \beta = 1+\sqrt{2}$ とおくと, $\alpha+\beta = 2,\ \alpha\beta = -1$ なので,

$a_1 = \alpha + \beta = \boxed{2}$

$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \boxed{6}$

次に, 解と係数の関係より $\alpha,\ \beta$ は $t^2 - 2t - 1 = 0$ の 2 解なので,

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \cdots ① \\ \beta^2 - 2\beta - 1 = 0 \cdots ② \end{cases}$$ が成り立つ.

① $\times\, \alpha^n +$ ② $\times\, \beta^n$ より $a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \Longleftrightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が示された.

(2) 以下 mod 10 で,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 && \equiv 2 \\
a_2 &= 6 && \equiv 6 \\
a_3 &= 2a_2 + a_1 && \equiv 2\times 6 + 2 \equiv 4 \\
a_4 &= 2a_3 + a_2 && \equiv 2\times 4 + 6 \equiv 4 \\
a_5 &= 2a_4 + a_3 && \equiv 2\times 4 + 4 \equiv 2 \\
a_6 &= 2a_5 + a_4 && \equiv 2\times 2 + 4 \equiv 8 \\
a_7 &= 2a_4 + a_3 && \equiv 2\times 8 + 2 \equiv 8 \\
a_8 &= 2a_7 + a_6 && \equiv 2\times 8 + 8 \equiv 4 \\
a_9 &= 2a_8 + a_7 && \equiv 2\times 4 + 8 \equiv 6 \\
a_{10} &= 2a_9 + a_8 && \equiv 2\times 6 + 4 \equiv 6 \\
a_{11} &= 2a_{10} + a_9 && \equiv 2\times 6 + 6 \equiv 8 \\
a_{12} &= 2a_{11} + a_{10} && \equiv 2\times 8 + 6 \equiv 2 \\
a_{13} &= 2a_{12} + a_{11} && \equiv 2\times 2 + 8 \equiv 2 \\
a_{14} &= 2a_{13} + a_{12} && \equiv 2\times 2 + 2 \equiv 6
\end{aligned}$$

よって a_{13} と a_{14} の 1 の位の数はそれぞれ $\boxed{2,\ 6}$

(3) mod 10 で,

$$\begin{cases} a_1 \equiv a_{13} \\ a_2 \equiv a_{14} \end{cases}$$ なので, a_n の 1 の位の数は 12 を周期に持つ.

よって $1000 = 12\times 83 + 4$ より $a_{1000} \equiv a_4 \equiv 4$

次に, $-1 < \alpha < 0$ より $0 < \alpha^{1000} < 1$

合わせると $3 < a_{1000} - \alpha^{1000} < 4 \Longleftrightarrow 3 < \beta^{1000} < 4$ が成り立つので, $[\,(1+\sqrt{2}\,)^{1000}\,]$ の 1 の位は $\boxed{3}$