’16 後期　理系 ❸　　　　提出　　年　　月　　日 名前

複素数平面上の 2 点 P(z), Q(w) が次の 2 つの条件をみたすとする. ただし, O(0) は原点である.

・線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい.

・O を端とする半直線 OP 上に Q がある.

(1) z を w を用いて表せ.

(2) 点 A($1 - i$) を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき, Q の軌跡を図示せよ. ただし, i は虚数単位である.

(3) $r > 0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする. P が点 B(β) を中心とする半径 r の円上を一周するとき, Q の軌跡を求めよ.

'16 後期 理系 ❸

複素数平面上の 2 点 P(z), Q(w) が次の 2 つの条件をみたすとする. ただし, O(0) は原点である.
・線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい. $\cdots$①
・O を端とする半直線 OP 上に Q がある. $\cdots$②

(1) z を w を用いて表せ.

(2) 点 A$(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき, Q の軌跡を図示せよ. ただし, i は虚数単位である.

(3) $r>0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする. P が点 B(β) を中心とする半径 r の円上を一周するとき, Q の軌跡を求めよ.

(1) $$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \iff \begin{cases} |z||w|=1 \\ \arg(z)=\arg(w) \end{cases} \iff \begin{cases} |z||\overline{w}|=1 \\ \arg(z)=-\arg(\overline{w}) \end{cases} \iff \begin{cases} |z\overline{w}|=1 \\ \arg(z\overline{w})=0 \end{cases} \iff z\overline{w}=1 \iff \boxed{z=\frac{1}{\overline{w}}}$$

【別解】極形式の利用

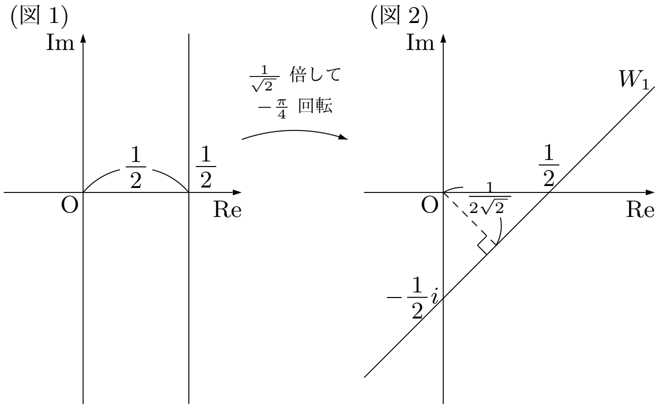
① より $w\neq 0$ なので, $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ とおける.

すると ①, ② より $z=\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)=\dfrac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r^2}=\dfrac{w}{w\overline{w}}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ なので, $\boxed{z=\dfrac{1}{\overline{w}}}$

(2) 点 A$(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線を C_1 とし, Q の軌跡を W_1 とすると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}\in W_1 &\iff \mathrm{P}\in C_1 \\
&\iff |z-1+i|=\sqrt{2}\wedge z\neq 0 \\
&\iff (z-1+i)(\overline{z}-1-i)=2\wedge z\neq 0 \\
&\iff z\overline{z}-(1-i)\overline{z}-(1+i)z=0\wedge z\neq 0 \\
&\iff 1-(1-i)\frac{1}{z}-(1+i)\frac{1}{\overline{z}}=0 \\
&\iff (1+i)w+(1-i)\overline{w}-1=0\quad ((1)\text{ より}) \\
&\iff \frac{(1+i)w+\overline{(1+i)w}}{2}=\frac{1}{2} \\
&\iff \mathrm{Re}\{(1+i)w\}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(図 1) (図 2)



よって $(1+i)w$ は (図 1) の直線を描く.

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より,

このとき w はこの直線を, O を中心に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍して $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものを描くので, W_1 は (図 2) の直線である.

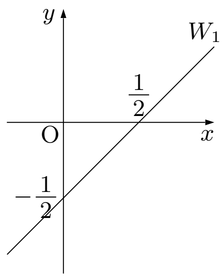
【別解】座標平面の利用

Q$(x+yi)$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$ とおくと, (1) より $z=\dfrac{1}{\overline{w}}=\dfrac{w}{|w|^2}=\dfrac{x+yi}{x^2+y^2}$ なので,

xy 平面において, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ であり,

$C_1:(x-1)^2+(y+1)^2=2\wedge(x,\,y)\neq(0,\,0)$ となるので,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(x,\,y)\in W_1 &\iff \mathrm{P}\left(\frac{x}{x^2+y^2},\,\frac{y}{x^2+y^2}\right)\in C_1 \\
&\iff \left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}+1\right)^2=2\wedge\left(\frac{x}{x^2+y^2},\,\frac{y}{x^2+y^2}\right)\neq(0,\,0) \\
&\iff \{x-(x^2+y^2)\}^2+\{y-(x^2+y^2)\}^2=2(x^2+y^2)^2\wedge(x,\,y)\neq(0,\,0) \\
&\iff x^2+y^2-2(x^2+y^2)(x+y)=0\wedge(x,\,y)\neq(0,\,0) \\
&\iff (x^2+y^2)(2x+2y-1)=0\wedge(x,\,y)\neq(0,\,0) \\
&\iff 2x+2y-1=0
\end{aligned}$$



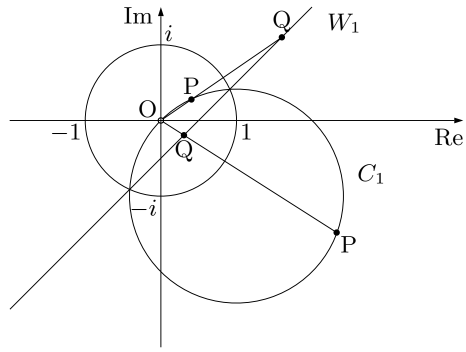
よって $W_1:2x+2y-1=0$ であり, 図示は右図の直線.

'16 後期　理系 ❸

(3) P が点 B(β) ($|\beta| \neq r$) を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C_2 とし, Q の軌跡を W_2 とすると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q} \in W_2 &\iff \mathrm{P} \in C_2 \\
&\iff |z-\beta| = r \\
&\iff (z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta}) = r^2 \\
&\iff z\overline{z} - \beta\overline{z} - \overline{\beta}z + \beta\overline{\beta} - r^2 = 0 \\
&\iff 1 - \beta\frac{1}{z} - \overline{\beta}\frac{1}{\overline{z}} + (|\beta|^2 - r^2)\frac{1}{z\overline{z}} = 0 \\
&\iff aw\overline{w} - \overline{\beta}w - \beta\overline{w} + 1 = 0 \quad ((1)\text{ より. また, } a = |\beta|^2 - r^2\,(\in \mathbb{R})\text{ とおいた. }) \\
&\iff w\overline{w} - \frac{\overline{\beta}}{a}w - \frac{\beta}{a}\overline{w} + \frac{1}{a} = 0 \quad (|\beta| \neq r\text{ より } a \neq 0\text{ なので}) \\
&\iff \left(w - \frac{\beta}{a}\right)\left(\overline{w} + \frac{\overline{\beta}}{a}\right) - \frac{\beta\overline{\beta}}{a^2} + \frac{1}{a} = 0 \\
&\iff \left|w - \frac{\beta}{a}\right|^2 = \frac{r^2}{a^2} \quad (\beta\overline{\beta} - a = r^2\text{ より}) \\
&\iff \left|w - \frac{\beta}{a}\right| = \frac{r}{|a|} \quad (r > 0\text{ より})
\end{aligned}
$$

よって W_2 は $\boxed{\text{点 } \dfrac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \text{ を中心とする半径 } \dfrac{r}{\left||\beta|^2 - r^2\right|} \text{ の円}}$ である.



【研究】

この点 P から点 Q への変換を

「O を中心とする半径 1 の反転」といいます.

この変換によって

(2) O を除く円 C_1 が直線 W_1 に,

(3) 円 C_2 が円 W_2 に,

それぞれ変換されることが分かりました.

反転

平面上において, 2 点 O, P に対し, 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が同じ向きで $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = r^2$ $(r > 0)$ を満たす点とするとき,
P から Q への変換を「O を中心とし, r を半径とする反転」という.

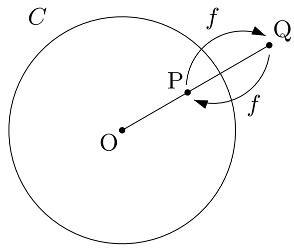
点の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円を C とし, O を中心とする半径 r の反転を f とする.
P を f で変換した点を Q とするとき,

(i) Q を f で変換した点もまた P である.

(ii) O の f による変換は一般には定義しない.

(iii) P が C 外の点のとき, Q は C 内の点 (O 以外) となる.
P が C 上の点のとき, Q は P と一致する.
P が C 内の点 (O 以外) のとき, Q は C 外の点となる.



以上の性質は定義から納得できるでしょう. 次の性質が非常に重要です.

円と直線の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の反転を f とする.

f により, 直線は直線か円に変換され, 円も直線か円に変換される.

詳しくは以下の通り.

(i) O を通る直線は自分自身に変換される.

(ii) O を通らない直線は O を通る円に変換される.

(iii) O を通る円は O を通らない直線に変換される.

(iv) O を通らない円は O を通らない円に変換される.

本問は (2) が (iii) の場合, (3) が (iv) の場合でした.