'16 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

$0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし, 媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq t)$$

と表される曲線の長さを $l(t)$ とおく.

(1) $l(t)$ を求めよ.

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\,0)$ と点 $\mathrm{P}\left(\cos^3 t,\,\sin^3 t\right)$ の距離を $k(t)$ とおく. $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, $\dfrac{k(t)}{l(t)}$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ.

'16 後期　理系 ❶

$0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし, 媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq t)$$

と表される曲線の長さを $l(t)$ とおく.

(1) $l(t)$ を求めよ.

(2) 原点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$ と点 $\mathrm{P}\left(\cos^3 t\,,\,\sin^3 t\right)$ の距離を $k(t)$ とおく. $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, $\dfrac{k(t)}{l(t)}$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$ なので,

$$\begin{aligned}
l(t) &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^t \sqrt{9\cos^4\theta\sin^2\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^t 3|\cos\theta\sin\theta|\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^t 3\cos\theta\sin\theta\, d\theta \quad \left(0 < t \leqq \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 < \theta < t \text{ において } \sin\theta > 0,\ \cos\theta > 0 \text{ なので}\right) \\
&= \left[\frac{3}{2}\sin^2\theta\right]_0^t \\
&= \boxed{\frac{3}{2}\sin^2 t}
\end{aligned}$$

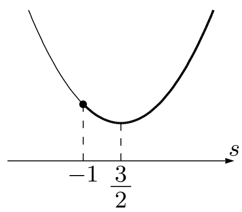
(2) $k(t) = \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}$ なので,

$\dfrac{k(t)}{l(t)} = \dfrac{\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}}{\dfrac{3}{2}\sin^2 t} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\cos^6 t + \sin^6 t}{\sin^4 t}}$ となり,

$f(t) = \dfrac{\cos^6 t + \sin^6 t}{\sin^4 t}$ とおくと, $f(t) = \dfrac{(1-\sin^2 t)^3 + \sin^6 t}{\sin^4 t} = \dfrac{1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t}{\sin^4 t} = \dfrac{1}{\sin^4 t} - \dfrac{3}{\sin^2 t} + 3$

$s = \dfrac{1}{\sin^2 t}$ とおくと, $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より, s のとる値の範囲は $1 \leqq s$ であり,

$f(t) = s^2 - 3s + 3 = \left(s - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ なので,



右図より $f(t)$ は $s = \dfrac{3}{2} \iff \sin t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる.

このとき, $\dfrac{k(t)}{l(t)}$ も最小になるので, 求める最小値は $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

また, $\sin t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき, $\cos t = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ $\quad(\cos t > 0$ より$)$ なので, P の座標は $\boxed{\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,,\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)}$

【研究】

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3\theta \\ \sin^3\theta \end{pmatrix}$ で表される曲線は「アステロイド」と呼ばれる曲線です.

θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ としたとき右図のようになります.

方程式は $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ となります.