'16後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日　名前

$0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし, 媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq t)$$

と表される曲線の長さを $l(t)$ とおく.

(1) $l(t)$ を求めよ.

(2) 原点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$ と点 $\mathrm{P}\left(\cos^3 t\,,\,\sin^3 t\right)$ の距離を $k(t)$ とおく. $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, $\dfrac{k(t)}{l(t)}$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ.

'16 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日　名前

3 点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$, $\mathrm{A}\bigl(a\,,\,a^2\bigr)$, $\mathrm{B}\bigl(b\,,\,b^2+1\bigr)$ を考える.

(1) a が $0<a<2$ をみたすとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ が不等式

$$x^2 \leqq y \leqq x^2+1$$

の表す領域に含まれるための b の条件を a を用いて表せ.

(2) $a,\ b$ が (1) の条件をみたすとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ.

'16 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

複素数平面上の 2 点 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ が次の 2 つの条件をみたすとする. ただし, $\mathrm{O}(0)$ は原点である.

・線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい.

・O を端とする半直線 OP 上に Q がある.

(1) z を w を用いて表せ.

(2) 点 $\mathrm{A}(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき, Q の軌跡を図示せよ. ただし, i は虚数単位である.

(3) $r>0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする. P が点 $\mathrm{B}(\beta)$ を中心とする半径 r の円上を一周するとき, Q の軌跡を求めよ.

’16 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

自然数 n に対して

$$a_n = (1+\sqrt{2}\,)^n + (1-\sqrt{2}\,)^n$$

とおく.

(1) a_1, a_2 を求め,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ.

(2) a_{13} と a_{14} の 1 の位の数をそれぞれ求めよ.

(3) $[\,(1+\sqrt{2}\,)^{1000}\,]$ の 1 の位の数を求めよ. ただし, 実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. たとえば $[\,1+\sqrt{2}\,] = 2$ である.

'16 後期　理系 ❶

$0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし, 媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq t)$$

と表される曲線の長さを $l(t)$ とおく.

(1) $l(t)$ を求めよ.

(2) 原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ と点 $\mathrm{P}\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$ の距離を $k(t)$ とおく. $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, $\dfrac{k(t)}{l(t)}$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$ なので,

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^t \sqrt{9\cos^4\theta\sin^2\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^t 3|\cos\theta\sin\theta|\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^t 3\cos\theta\sin\theta\, d\theta \quad \left(0 < t \leqq \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 < \theta < t \text{ において} \sin\theta > 0,\ \cos\theta > 0 \text{ なので}\right) \\ &= \left[\frac{3}{2}\sin^2\theta\right]_0^t \\ &= \boxed{\frac{3}{2}\sin^2 t} \end{aligned}$$

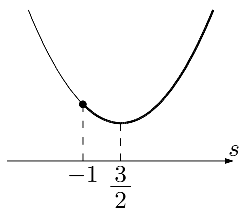
(2) $k(t) = \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}$ なので,

$\dfrac{k(t)}{l(t)} = \dfrac{\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}}{\frac{3}{2}\sin^2 t} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\cos^6 t + \sin^6 t}{\sin^4 t}}$ となり,

$f(t) = \dfrac{\cos^6 t + \sin^6 t}{\sin^4 t}$ とおくと, $f(t) = \dfrac{(1-\sin^2 t)^3 + \sin^6 t}{\sin^4 t} = \dfrac{1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t}{\sin^4 t} = \dfrac{1}{\sin^4 t} - \dfrac{3}{\sin^2 t} + 3$

$s = \dfrac{1}{\sin^2 t}$ とおくと, $0 < t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より, s のとる値の範囲は $1 \leqq s$ であり,

$f(t) = s^2 - 3s + 3 = \left(s - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ なので,



右図より $f(t)$ は $s = \dfrac{3}{2} \iff \sin t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる.

このとき, $\dfrac{k(t)}{l(t)}$ も最小になるので, 求める最小値は $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

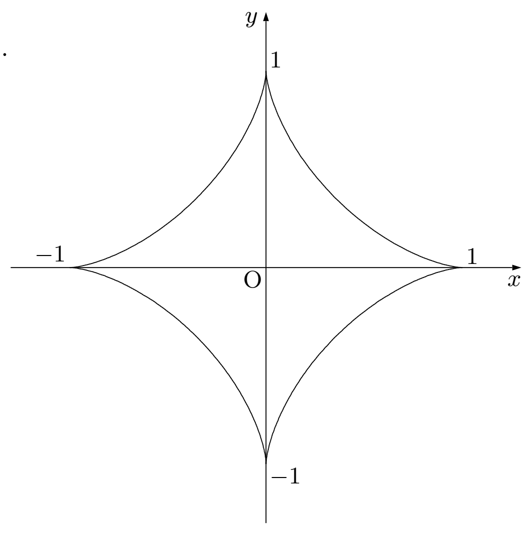
また, $\sin t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のとき, $\cos t = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ($\cos t > 0$ より) なので, P の座標は $\boxed{\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)}$

【研究】

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3\theta \\ \sin^3\theta \end{pmatrix}$ で表される曲線は「アステロイド」と呼ばれる曲線です.

θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ としたとき右図のようになります.

方程式は $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ となります.



’16 後期　理系 ❷

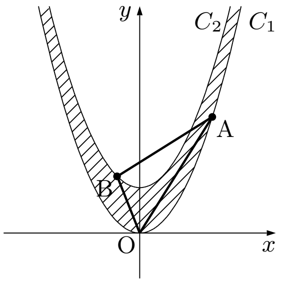
3 点 O$(0\,,\,0)$, A$\left(a\,,\,a^2\right)$, B$\left(b\,,\,b^2+1\right)$ を考える.

(1) a が $0<a<2$ をみたすとき, $\triangle$OAB が不等式
$$x^2 \leqq y \leqq x^2+1$$
の表す領域に含まれるための b の条件を a を用いて表せ.

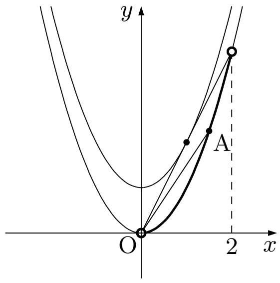
(2) $a,\ b$ が (1) の条件をみたすとき, $\triangle$OAB の面積の最大値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ.

(1) $C_1: y=x^2,\ C_2: y=x^2+1,\ K: x^2 \leqq y \leqq x^2+1$ とおくと, K は図 1 の斜線部 (境界含む) となる.

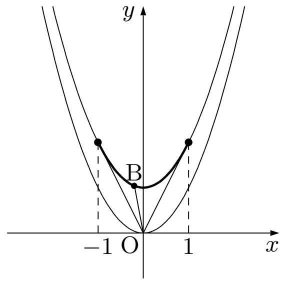
(図 1)



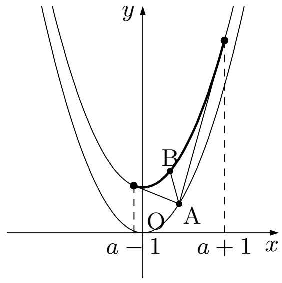
(i)



(ii)



(iii)



(i) 2 点 O と $(2\,,\,4)$ を通る直線 $y=2x$ と C_2 の位置関係を調べると,
$(x^2+1)-2x=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$ より $x=1$ で接する.
$C_1,\ C_2$ は下に凸なので, a が $0<a<2$ を満たして動くとき, 図 (i) より線分 OA は K に含まれる.

(ii) $C_2: y=x^2+1$ において $y'=2x$ より,
C_2 の $x=t$ における接線 l_t の式は $y=2t(x-t)+t^2+1 \iff y=2tx-t^2+1$
l_t が O を通るとき, $0=-t^2+1 \iff (t+1)(t-1)=0 \iff t=\pm 1$
$C_1,\ C_2$ が下に凸であることと合わせると, 図 (ii) より線分 OB が K に含まれる b の範囲は $-1 \leqq b \leqq 1$.

(iii) (ii) の l_t が A を通るとき, $a^2=2ta-t^2+1 \iff t^2-2at+a^2-1=0 \iff (t-a+1)(t-a-1)=0 \iff t=a\pm 1$
$C_1,\ C_2$ が下に凸であることと合わせると, 図 (iii) より線分 AB が K に含まれる b の範囲は $a-1 \leqq b \leqq a+1$.

(i),(ii),(iii) より

$$\triangle\text{OAB が } K \text{ に含まれる} \iff \begin{cases} 0<a<2 \\ -1 \leqq b \leqq 1 \\ a-1 \leqq b \leqq a+1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 0<a<2 \\ a-1 \leqq b \leqq 1 \end{cases}} \quad (-1<a-1,\ 1<a+1 \text{ より})$$

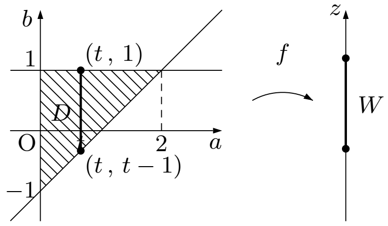
’16 後期　理系 ❷

(2) $(\triangle\mathrm{OAB}$ の面積$)=\dfrac{1}{2}\left|a(b^2+1)-a^2b\right|$ であり, $f(a,\,b)=a(b^2+1)-a^2b$ とおく.

$D:\begin{cases}0<a<2\\ a-1\leqq b\leqq 1\end{cases}$ とし, ab 平面上の点 $(a\,,\,b)$ が D 内を動くときの, $z=f(a,\,b)$ の値域を W とする.

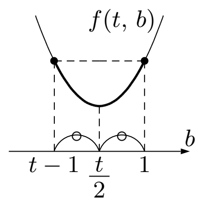
【方針 1】順像法

D 内で $a=t\ (0<t<2)$ と固定すると,
b の範囲は $t-1\leqq b\leqq 1$ であり,



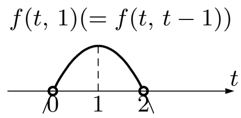
b の関数 $z=f(t,\,b)=tb^2-t^2b+t=t\left(b-\dfrac{t}{2}\right)^2-\dfrac{t^3}{4}+t$
のとる値の範囲は, 右図より

$$f\left(t,\,\frac{t}{2}\right)\leqq f(t,\,b)\leqq f(t,\,1)\,(=f(t,\,t-1))$$
$$\iff -\frac{t^3}{4}+t\leqq f(t,\,b)\leqq -t^2+2t$$

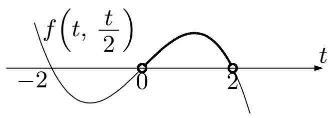


次に t を $0<t<2$ で動かすと,

(i) $f(t,\,1)=f(t,\,t-1)=-t(t-2)$ の最大値は
右図より $f(1,\,1)=f(1,\,0)=1$



(ii) $f\left(t,\,\dfrac{t}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}t(t+2)(t-2)$ は
右図より最小値を持たず, 下限が 0

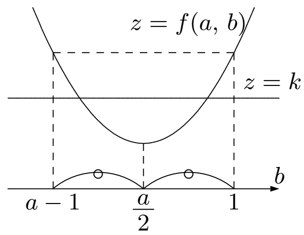


(i),(ii) より $W:0<f(a,\,b)\leqq 1$ なので,
$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値は $\dfrac{1}{2}|\,1\,|=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ であり, $\boxed{(a,\,b)=(1,\,0),\ (1,\,1)}$ のときである.

【方針 1】逆像法

$$k\in W\iff \exists\,(a,\,b)\,(\in D),\ k=f(a,\,b)$$
$$\iff \exists\,a,\,b,\begin{cases}k=ab^2-a^2b+a\\ 0<a<2\wedge a-1\leqq b\leqq 1\end{cases}$$
$$\iff \exists\,a\,(0<a<2),\ [\,b\text{ の 2 次方程式 }ab^2-a^2b+a=k\text{ が }a-1\leqq b\leqq 1\text{ に解を持つ}\,]\cdots☆$$

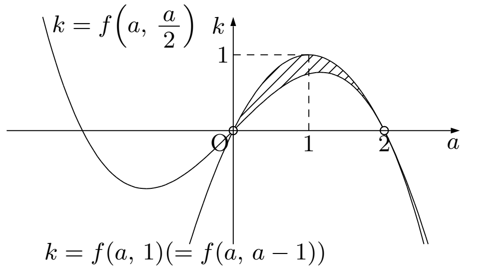
$f(a,\,b)=a\left(b-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^3}{4}+a$ であり,
$a>0$ より bz 平面の $z=f(a,\,b)$ のグラフは下に凸の放物線になるので右図より,



$$☆\iff \exists\,a\,(0<a<2),\ \left[\,f\left(a,\,\frac{a}{2}\right)\leqq k\leqq f(a,\,1)(=f(a,\,a-1))\,\right]$$
$$\iff \exists\,a\,(0<a<2),\ \left[\,-\frac{a^3}{4}+a\leqq k\leqq -a^2+2a\,\right]\cdots☆'$$

$$(-a^2+2a)-\left(-\frac{a^3}{4}+a\right)=0\iff a^3-4a^2+4a=0$$
$$\iff a(a-2)^2=0$$
$$\iff a=0,\ 2$$

$f(a,\,1)=f(a,\,a-1)=-a(a-2)$
$f\left(a,\,\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a(a+2)(a-2)$
なので, 右図より
$☆'\iff 0<k\leqq 1$



よって $W:0<f(a,\,b)\leqq 1$ なので, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値は $\dfrac{1}{2}|\,1\,|=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ である.

また, $f(a,\,b)=1$ となるのは $f(a,\,1),\ f(a,\,a-1)$ において $a=1$ のとき, すなわち $f(1,\,1)=f(1,\,0)=1$ なので,
$\boxed{(a,\,b)=(1,\,0),\ (1,\,1)}$ のときである.

'16 後期　理系 ❸

> 複素数平面上の 2 点 $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ が次の 2 つの条件をみたすとする. ただし, $\mathrm{O}(0)$ は原点である.
> ・線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい. $\cdots$ ①
> ・O を端とする半直線 OP 上に Q がある. $\cdots$ ②
> (1) z を w を用いて表せ.
> (2) 点 $\mathrm{A}(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき, Q の軌跡を図示せよ. ただし, i は虚数単位である.
> (3) $r>0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする. P が点 $\mathrm{B}(\beta)$ を中心とする半径 r の円上を一周するとき, Q の軌跡を求めよ.

(1) $\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z||w|=1 \\ \arg(z)=\arg(w) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z||\overline{w}|=1 \\ \arg(z)=-\arg(\overline{w}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z\overline{w}|=1 \\ \arg(z\overline{w})=0 \end{cases} \Longleftrightarrow z\overline{w}=1 \Longleftrightarrow \boxed{z=\dfrac{1}{\overline{w}}}$

【別解】極形式の利用

① より $w \neq 0$ なので, $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ とおける.

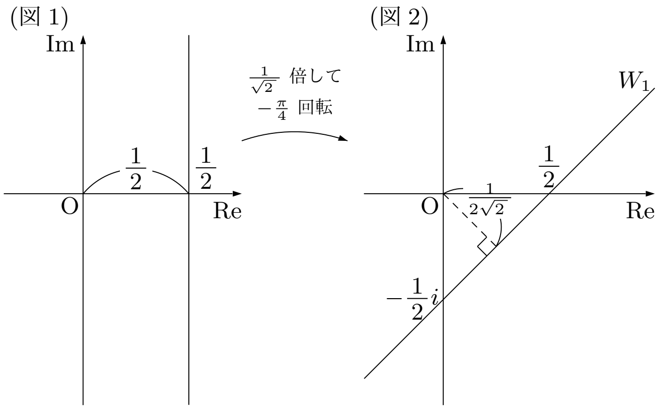
すると ①, ② より $z=\dfrac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)=\dfrac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r^2}=\dfrac{w}{w\overline{w}}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ なので, $\boxed{z=\dfrac{1}{\overline{w}}}$

(2) 点 $\mathrm{A}(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線を C_1 とし, Q の軌跡を W_1 とすると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}\in W_1 &\Longleftrightarrow \mathrm{P}\in C_1 \\
&\Longleftrightarrow |z-1+i|=\sqrt{2} \wedge z\neq 0 \\
&\Longleftrightarrow (z-1+i)(\overline{z}-1-i)=2 \wedge z\neq 0 \\
&\Longleftrightarrow z\overline{z}-(1-i)\overline{z}-(1+i)z=0 \wedge z\neq 0 \\
&\Longleftrightarrow 1-(1-i)\frac{1}{z}-(1+i)\frac{1}{\overline{z}}=0 \\
&\Longleftrightarrow (1+i)w+(1-i)\overline{w}-1=0 \quad ((1)\text{ より}) \\
&\Longleftrightarrow \frac{(1+i)w+\overline{(1+i)w}}{2}=\frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\{(1+i)w\}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

よって $(1+i)w$ は (図 1) の直線を描く.

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ より,



このとき w はこの直線を, O を中心に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍して $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものを描くので, W_1 は (図 2) の直線である.

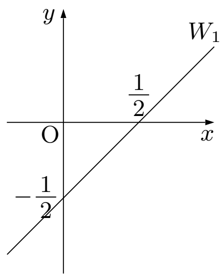
【別解】座標平面の利用

$\mathrm{Q}(x+yi)$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$ とおくと, (1) より $z=\dfrac{1}{\overline{w}}=\dfrac{w}{|w|^2}=\dfrac{x+yi}{x^2+y^2}$ なので,

xy 平面において, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であり,

$C_1:(x-1)^2+(y+1)^2=2\wedge(x,\ y)\neq(0,\ 0)$ となるので,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}(x,\ y)\in W_1 &\Longleftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)\in C_1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}+1\right)^2=2\wedge\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right)\neq(0,\ 0) \\
&\Longleftrightarrow \{x-(x^2+y^2)\}^2+\{y-(x^2+y^2)\}^2=2(x^2+y^2)^2\wedge(x,\ y)\neq(0,\ 0) \\
&\Longleftrightarrow x^2+y^2-2(x^2+y^2)(x+y)=0\wedge(x,\ y)\neq(0,\ 0) \\
&\Longleftrightarrow (x^2+y^2)(2x+2y-1)=0\wedge(x,\ y)\neq(0,\ 0) \\
&\Longleftrightarrow 2x+2y-1=0
\end{aligned}
$$



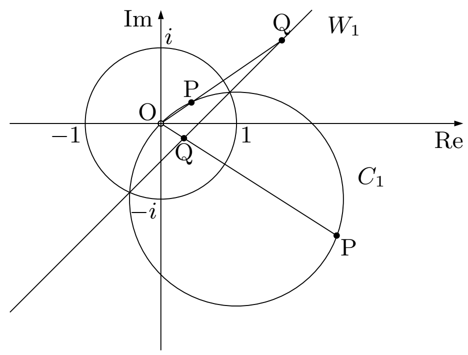
よって $W_1:2x+2y-1=0$ であり, 図示は右図の直線.

’16 後期　理系 ❸

(3) P が点 $\mathrm{B}(\beta)$ $(|\beta| \neq r)$ を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C_2 とし, Q の軌跡を W_2 とすると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q} \in W_2 &\iff \mathrm{P} \in C_2 \\
&\iff |z-\beta| = r \\
&\iff (z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta}) = r^2 \\
&\iff z\overline{z} - \beta\overline{z} - \overline{\beta}z + \beta\overline{\beta} - r^2 = 0 \\
&\iff 1 - \beta\frac{1}{z} - \overline{\beta}\frac{1}{\overline{z}} + (|\beta|^2 - r^2)\frac{1}{z\overline{z}} = 0 \\
&\iff aw\overline{w} - \overline{\beta}w - \beta\overline{w} + 1 = 0 \quad ((1)\text{ より. また, } a = |\beta|^2 - r^2\,(\in \mathbb{R})\text{ とおいた. }) \\
&\iff w\overline{w} - \frac{\overline{\beta}}{a}w - \frac{\beta}{a}\overline{w} + \frac{1}{a} = 0 \quad (|\beta| \neq r\text{ より } a \neq 0\text{ なので}) \\
&\iff \left(w - \frac{\beta}{a}\right)\left(\overline{w} + \frac{\overline{\beta}}{a}\right) - \frac{\beta\overline{\beta}}{a^2} + \frac{1}{a} = 0 \\
&\iff \left|w - \frac{\beta}{a}\right|^2 = \frac{r^2}{a^2} \quad (\beta\overline{\beta} - a = r^2\text{ より}) \\
&\iff \left|w - \frac{\beta}{a}\right| = \frac{r}{|a|} \quad (r > 0\text{ より})
\end{aligned}$$

よって W_2 は $\boxed{\text{点 } \dfrac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \text{ を中心とする半径 } \dfrac{r}{\big||\beta|^2 - r^2\big|} \text{ の円}}$ である.



【研究】

この点 P から点 Q への変換を

「O を中心とする半径 1 の反転」といいます.

この変換によって

(2) O を除く円 C_1 が直線 W_1 に,

(3) 円 C_2 が円 W_2 に,

それぞれ変換されることが分かりました.

反転

平面上において, 2 点 O, P に対し, 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が同じ向きで $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = r^2$ $(r > 0)$ を満たす点とするとき,
P から Q への変換を「O を中心とし, r を半径とする反転」という.

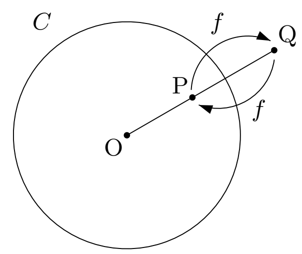
点の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の円を C とし, O を中心とする半径 r の反転を f とする.
P を f で変換した点を Q とするとき,

(i) Q を f で変換した点もまた P である.

(ii) O の f による変換は一般には定義しない.

(iii) P が C 外の点のとき, Q は C 内の点 (O 以外) となる.
P が C 上の点のとき, Q は P と一致する.
P が C 内の点 (O 以外) のとき, Q は C 外の点となる.



以上の性質は定義から納得できるでしょう. 次の性質が非常に重要です.

円と直線の反転の性質

O を中心とする半径 $r\,(>0)$ の反転を f とする.

f により, 直線は直線か円に変換され, 円も直線か円に変換される.

詳しくは以下の通り.

(i) O を通る直線は自分自身に変換される.

(ii) O を通らない直線は O を通る円に変換される.

(iii) O を通る円は O を通らない直線に変換される.

(iv) O を通らない円は O を通らない円に変換される.

本問は (2) が (iii) の場合, (3) が (iv) の場合でした.

'16 後期　理系 ❹

自然数 n に対して

$$a_n=(1+\sqrt{2}\,)^n+(1-\sqrt{2}\,)^n$$

とおく.

(1) $a_1,\ a_2$ を求め,

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ.

(2) a_{13} と a_{14} の 1 の位の数をそれぞれ求めよ.

(3) $[\,(1+\sqrt{2}\,)^{1000}\,]$ の 1 の位の数を求めよ. ただし, 実数 x に対して $[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す. たとえば $[\,1+\sqrt{2}\,]=2$ である.

(1) $\alpha=1-\sqrt{2}\,,\ \beta=1+\sqrt{2}$ とおくと, $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$ なので,

$a_1=\alpha+\beta=\boxed{2}$

$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\boxed{6}$

次に, 解と係数の関係より $\alpha,\ \beta$ は $t^2-2t-1=0$ の 2 解なので,

$$\begin{cases}\alpha^2-2\alpha-1=0\cdots①\\ \beta^2-2\beta-1=0\cdots②\end{cases}$$ が成り立つ.

$①\times\alpha^n+②\times\beta^n$ より $a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\iff a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が示された.

(2) 以下 mod 10 で,

$$\begin{aligned}
a_1&=2 &&\equiv 2\\
a_2&=6 &&\equiv 6\\
a_3&=2a_2+a_1 &&\equiv 2\times6+2\equiv4\\
a_4&=2a_3+a_2 &&\equiv 2\times4+6\equiv4\\
a_5&=2a_4+a_3 &&\equiv 2\times4+4\equiv2\\
a_6&=2a_5+a_4 &&\equiv 2\times2+4\equiv8\\
a_7&=2a_4+a_3 &&\equiv 2\times8+2\equiv8\\
a_8&=2a_7+a_6 &&\equiv 2\times8+8\equiv4\\
a_9&=2a_8+a_7 &&\equiv 2\times4+8\equiv6\\
a_{10}&=2a_9+a_8 &&\equiv 2\times6+4\equiv6\\
a_{11}&=2a_{10}+a_9 &&\equiv 2\times6+6\equiv8\\
a_{12}&=2a_{11}+a_{10} &&\equiv 2\times8+6\equiv2\\
a_{13}&=2a_{12}+a_{11} &&\equiv 2\times2+8\equiv2\\
a_{14}&=2a_{13}+a_{12} &&\equiv 2\times2+2\equiv6
\end{aligned}$$

よって a_{13} と a_{14} の 1 の位の数はそれぞれ $\boxed{2,\ 6}$

(3) mod 10 で,

$$\begin{cases}a_1\equiv a_{13}\\ a_2\equiv a_{14}\end{cases}$$ なので, a_n の 1 の位の数は 12 を周期に持つ.

よって $1000=12\times83+4$ より $a_{1000}\equiv a_4\equiv4$

次に, $-1<\alpha<0$ より $0<\alpha^{1000}<1$

合わせると $3<a_{1000}-\alpha^{1000}<4\iff 3<\beta^{1000}<4$ が成り立つので, $[\,(1+\sqrt{2}\,)^{1000}\,]$ の 1 の位は $\boxed{3}$