’15 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

p を正の実数とする. $a,\ b$ を実数として $x = a,\ y = (b-3)^2$ とおく. 点 $(a\,,\,b)$ が連立不等式 $0 \leqq a \leqq p,\ a \leqq b \leqq a+2$ の表す領域内を動くとき, 座標平面上の点 $(x\,,\,y)$ が動いてできる図形の面積を S とおく.

(1) $p = 1$ のとき S の値を求めよ.

(2) $p = 5$ のとき S の値を求めよ.

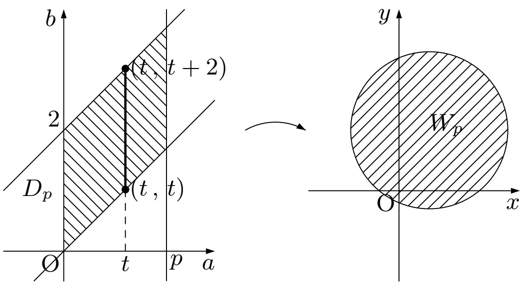
'15 後期　理系　❹

p を正の実数とする. $a,\ b$ を実数として $x=a,\ y=(b-3)^2$ とおく. 点 $(a\,,b)$ が連立不等式 $0 \leqq a \leqq p,\ a \leqq b \leqq a+2$ の表す領域内を動くとき, 座標平面上の点 $(x\,,y)$ が動いてできる図形の面積を S とおく.

(1) $p=1$ のとき S の値を求めよ.　　(2) $p=5$ のとき S の値を求めよ.

$D_p : \begin{cases} 0 \leqq a \leqq p \\ a \leqq b \leqq a+2 \end{cases}$ とし, 点 $(a\,,b)$ が D 内を動くときに $\begin{cases} x=a \\ y=(b-3)^2 \end{cases}$ によって定まる点 $(x\,,y)$ の軌跡を W_p とする.

【方針 1】順像法

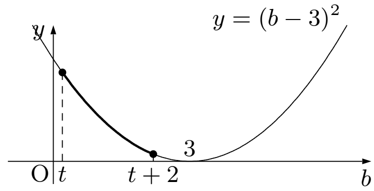


(1) $p=1$ のとき

$a=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で a を固定すると b の値域は $t \leqq b \leqq t+2$ である.

このとき $x=t$ であり,

$t \leqq b \leqq t+2 \leqq 3$ なので, 右図より y の値域は $(t-1)^2 \leqq y \leqq (t-3)^2$ となる.



次に a を $0 \leqq a \leqq 1$ で動かすと, 点 $(x\,,y)$ は $\begin{cases} x=a \\ (a-1)^2 \leqq y \leqq (a-3)^2 \end{cases}$ を満たして動くので,

$W_1 : (x-1)^2 \leqq y \leqq (x-3)^2\quad (0 \leqq x \leqq 1)$ となる.

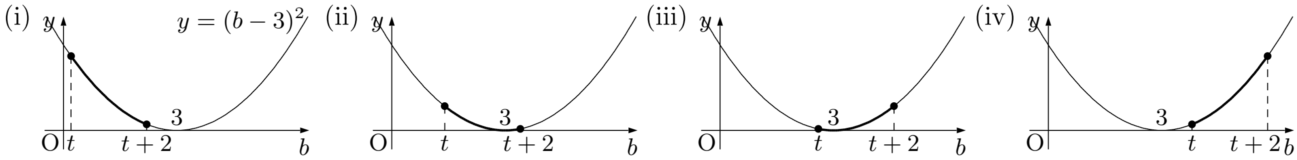
よって $S=\displaystyle\int_0^1 \{(x-3)^2-(x-1)^2\}dx = \left[\frac{1}{3}(x-3)^3-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(-8+27)-\frac{1}{3}(0+1) = \boxed{6}$

(2) $p=5$ のとき

$a=t\ (0 \leqq t \leqq 5)$ で a を固定すると b の値域は $t \leqq b \leqq t+2$ である.

このとき $x=t$ であり,

$t \leqq b \leqq t+2 \leqq 7$ なので, 下図より y の値域は



(i)　　$0 \leqq t \wedge t+2 \leqq 3 \Longleftrightarrow 0 \leqq t \leqq 1$ のとき $(t-1)^2 \leqq y \leqq (t-3)^2$ となる.

(ii) $t+1 \leqq 3 \wedge 3 \leqq t+2 \Longleftrightarrow 1 \leqq t \leqq 2$ のとき　$0 \leqq y \leqq (t-3)^2$ となる.

(iii)　$t \leqq 3 \wedge 3 \leqq t+1 \Longleftrightarrow 2 \leqq t \leqq 3$ のとき　$0 \leqq y \leqq (t-1)^2$ となる.

(iv)　　$3 \leqq t \leqq 5$ のとき $(t-3)^2 \leqq y \leqq (t-1)^2$ となる.

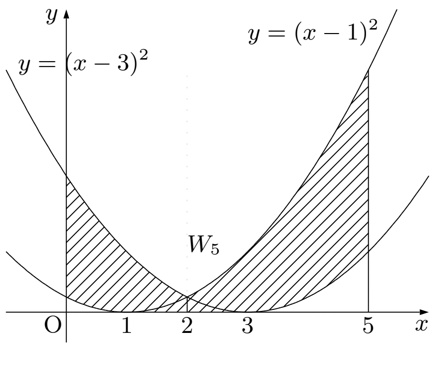
次に a を $0 \leqq a \leqq 5$ で動かすことにより,

$$W_5 : \begin{cases} (x-1)^2 \leqq y \leqq (x-3)^2 & (0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 \leqq y \leqq (x-3)^2 & (1 \leqq x \leqq 2 \text{ のとき}) \\ 0 \leqq y \leqq (x-1)^2 & (2 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \\ (x-3)^2 \leqq y \leqq (x-1)^2 & (3 \leqq x \leqq 5 \text{ のとき}) \end{cases} \text{ となる.}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (x-3)^2dx - \int_0^1 (x-1)^2dx + \int_2^5 (x-1)^2dx - \int_3^5 (x-3)^2dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^2 - \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_2^5 - \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_3^5 \\ &= \frac{1}{3}(-1+27) - \frac{1}{3}(0+1) + \frac{1}{3}(64-1) - \frac{1}{3}(8-0) = \boxed{\frac{80}{3}} \end{aligned}$$

W_5 を図示する必要はないが, 右図のようになる.



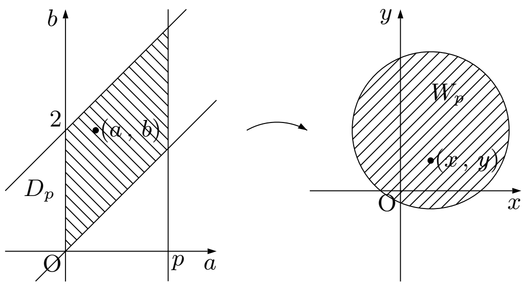
'15 後期　理系 ❹

【方針 2】逆像法

$$
\begin{aligned}
(x,\,y)\in W_p &\iff \exists\,(a,\,b)\,(\in D_p),\ x=a\land y=(b-3)^2\\
&\iff \exists\,a,\,b\begin{cases} x=a\land y=(b-3)^2\\ 0\leqq a\leqq p\land a\leqq b\leqq a+2\end{cases}\\
&\iff \exists\,b\begin{cases} y=(b-3)^2\\ 0\leqq x\leqq p\land x\leqq b\leqq x+2\end{cases}
\end{aligned}
$$

$\iff$ b の 2 次方程式 $y=(b-3)^2$ が
$x\leqq b\leqq x+2$ (ただし $0\leqq x\leqq p$) に実数解を持つ

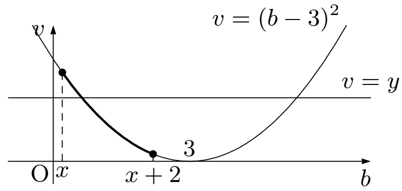
$\iff$ bv 平面において $v=(b-3)^2$ と $v=y$ のグラフが
$x\leqq b\leqq x+2$ (ただし $0\leqq x\leqq p$) に交点を持つ $\cdots$ ☆



(1) $p=1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ より $0\leqq x\leqq b\leqq x+2\leqq 3$ なので, 右図より

☆ $\iff (x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2\quad (0\leqq x\leqq 1)$ となる.

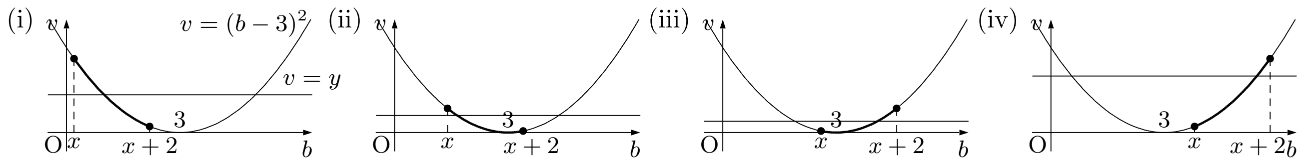


よって $W_1: (x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2\land 0\leqq x\leqq 1$ なので,

$$S=\int_0^1\{(x-3)^2-(x-1)^2\}dx=\left[\frac{1}{3}(x-3)^3-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{1}{3}(-8+27)-\frac{1}{3}(0+1)=\boxed{6}$$

(2) $p=5$ のとき

$0\leqq x\leqq 5$ より $0\leqq x\leqq b\leqq x+2\leqq 7$ なので, 下図より



(i)　$0\leqq x\land x+2\leqq 3\iff 0\leqq x\leqq 1$ のとき ☆ $\iff (x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2$ となる.

(ii)　$x+1\leqq 3\land 3\leqq x+2\iff 1\leqq x\leqq 2$ のとき ☆ $\iff 0\leqq y\leqq (x-3)^2$ となる.

(iii)　$x\leqq 3\land 3\leqq x+1\iff 2\leqq x\leqq 3$ のとき ☆ $\iff 0\leqq y\leqq (x-1)^2$ となる.

(iv)　$3\leqq x\leqq 5$ のとき ☆ $\iff (x-3)^2\leqq y\leqq (x-1)^2$ となる.

よって

$$
\begin{aligned}
W_5:\ &[\,(x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2\land 0\leqq x\leqq 1\,]\\
\lor\ &[\,0\leqq y\leqq (x-3)^2\land 1\leqq x\leqq 2\,]\\
\lor\ &[\,0\leqq y\leqq (x-1)^2\land 2\leqq x\leqq 3\,]\\
\lor\ &[\,(x-3)^2\leqq y\leqq (x-1)^2\land 3\leqq x\leqq 5\,]
\end{aligned}
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
S&=\int_0^2(x-3)^2dx-\int_0^1(x-1)^2dx+\int_2^5(x-1)^2dx-\int_3^5(x-3)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_2^5-\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_3^5\\
&=\frac{1}{3}(-1+27)-\frac{1}{3}(0+1)+\frac{1}{3}(64-1)-\frac{1}{3}(8-0)=\boxed{\frac{80}{3}}
\end{aligned}
$$