## ’15 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 $E$ とその焦点 F$(1\,,\,0)$ がある. $E$ 上に点 P をとり, 直線 PF と $E$ との交点のうち P と異なる点を Q とする. F を通り直線 PF と垂直な直線と $E$ との 2 つの交点を R, S とする.

(1) $r$ を正の実数, $\theta$ を実数とする. 点 $(r\cos\theta+1\,,\,r\sin\theta)$ が $E$ 上にあるとき, $r$ を $\theta$ で表せ.

(2) P が $E$ 上を動くとき, $\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$ の最小値を求めよ.

**'15 後期 理系 ❸**

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 $E$ とその焦点 $\mathrm{F}(1\,,0)$ がある. $E$ 上に点 P をとり, 直線 PF と $E$ との交点のうち P と異なる点を Q とする. F を通り直線 PF と垂直な直線と $E$ との 2 つの交点を R, S とする.

(1) $r$ を正の実数, $\theta$ を実数とする. 点 $(r\cos\theta+1\,,r\sin\theta)$ が $E$ 上にあるとき, $r$ を $\theta$ で表せ.

(2) P が $E$ 上を動くとき, PF + QF + RF + SF の最小値を求めよ.

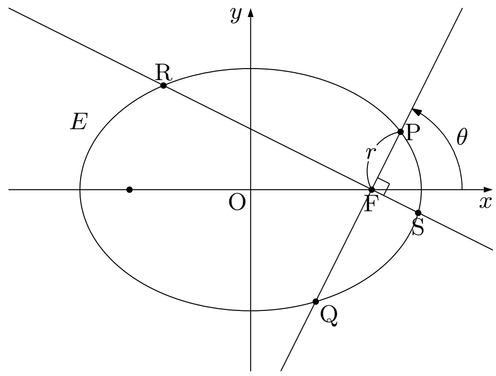
(1) 点 $(r\cos\theta+1\,,r\sin\theta)$ が $E$ 上にある

$$\iff \frac{(r\cos\theta+1)^2}{2}+(r\sin\theta)^2=1 \iff r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta+1+2r^2\sin^2\theta=2$$

$$\iff (2-\cos^2\theta)r^2+2(\cos\theta)r-1=0 \iff \{(\sqrt{2}-\cos\theta)r+1\}\{(\sqrt{2}+\cos\theta)r-1\}=0$$

$$\iff r=-\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta},\ \frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta} \iff \boxed{r=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}}\quad (r>0 \text{ より})\cdots☆$$

(2) $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$ とおく.




$\overrightarrow{\mathrm{PF}}=f(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ であり, $f(\theta)>0$ なので, $\mathrm{PF}=f(\theta)$ である.

F を中心とした Q の $x$ 軸正方向からの回転角は $\theta+\pi$ であり,
PQ ⊥ RS より, F を中心とした R, S の $x$ 軸正方向からの回転角は
それぞれ $\theta+\dfrac{\pi}{2}$, $\theta+\dfrac{3\pi}{2}$ としてよい.

よって

$$\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$$

$$=f(\theta)+f(\theta+\pi)+f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}+\frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}\,(4-\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{(2-\cos^2\theta)(2-\sin^2\theta)}=\frac{6\sqrt{2}}{4-2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\theta\sin^2\theta}=\frac{24\sqrt{2}}{8+\sin^2 2\theta}$$

$\theta$ を動かしたとき $\sin^2 2\theta$ のとる値の範囲は $0\leqq\sin^2 2\theta\leqq 1$ なので,

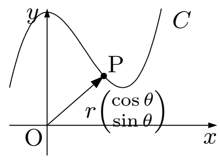
PF + QF + RF + SF の最小値は $\dfrac{24\sqrt{2}}{8+1}=\boxed{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}}$

【補足】

☆ は楕円 $E$ の焦点の 1 つ F を極とした極方程式です. 2 次曲線では焦点を通る直線との交点は極方程式を用いると扱いやすくなります.

**図形の極方程式**

$xy$ 平面において, 原点 O を「極」, $x$ 軸を「始線」とする極座標を $(r\,,\theta)$ とする.
図形 $C$ に対し, $\mathrm{P}(r\,,\theta)\in C$ となる $r$ と $\theta$ の必要十分条件を「$C$ の極方程式」という.



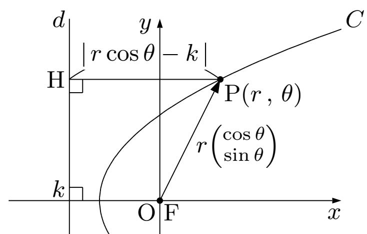

**2 次曲線の極方程式**

$xy$ 平面において, 焦点 F を O, 準線 $d$ を $x=k$ $(k\neq 0)$, 離心率を $e$ $(e>0)$ とする 2 次曲線 $C$ の極方程式は

$$C:r=\frac{-ek}{1-e\cos\theta} \text{ または } C:r=\frac{ek}{1+e\cos\theta}$$

(証明)

以下複号同順で




$$\mathrm{P}(r\,,\theta)\in C \iff r=e|r\cos\theta-k| \iff r=\pm e(r\cos\theta-k) \iff r(1\mp e\cos\theta)=\mp ek$$

$$\iff r=\frac{\mp ek}{1\mp e\cos\theta}\quad (k\neq 0 \text{ より } 1\mp e\cos\theta=0 \text{ は上式を満たさないので})$$

$f(\theta)=\dfrac{-ek}{1-e\cos\theta}$, $g(\theta)=\dfrac{ek}{1+e\cos\theta}$ とおくと, $g(\theta+\pi)=\dfrac{ek}{1-e\cos\theta}=-f(\theta)$ より,
点 $(r_0\,,\theta_0)$ が $r=f(\theta)$ 上にあるとき, 点 $(-r_0\,,\theta_0+\pi)$ は $r=g(\theta)$ 上にある.
極座標において, 2 点 $(r_0\,,\theta_0)$, $(-r_0\,,\theta_0+\pi)$ は同じ点なので, 2 曲線 $r=f(\theta)$ と $r=g(\theta)$ は同じ曲線である.

よって $C:r=\dfrac{-ek}{1-e\cos\theta}$ または $C:r=\dfrac{ek}{1+e\cos\theta}$