'15 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日　名前

p を 3 以上の奇数, θ を $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$　$\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたす実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = p^n \cos(n\theta)$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める.

(1) a_2 を p で表せ.

(2) a_{n+2} を $a_{n+1},\ a_n,\ p$ で表せ.

(3) すべての n について a_n は p で割り切れない整数であることを示せ.

’15 後期　理系 ❷

p を 3 以上の奇数, θ を $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたす実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = p^n\cos(n\theta)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める.

(1) a_2 を p で表せ.

(2) a_{n+2} を $a_{n+1},\ a_n,\ p$ で表せ.

(3) すべての n について a_n は p で割り切れない整数であることを示せ.

p は 3 以上の奇数 $\cdots$ ①

(1) $a_2 = p^2\cos 2\theta = p^2(2\cos^2\theta - 1) = 2 - p^2$ より $\boxed{a_2 = 2 - p^2}$

(2) $\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta$ より

$$\frac{a_{n+2}}{p^{n+2}} + \frac{a_n}{p^n} = 2\cdot\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}\cdot\frac{1}{p} \iff \boxed{a_{n+2} = 2a_{n+1} - p^2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)}$$

(3) 「a_n は整数であり p で割り切れない」を $P(n)$ とおき, $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ P(n)$ が真であることを示す.

(i) $a_1 = p\cos\theta = 1$ なので, ① より $P(1)$ が成り立つ.
$a_2 = 2 - p^2 \equiv 2 \pmod{p}$ なので, ① より $P(2)$ が成り立つ.

(ii) $k\,(\in\mathbb{N})$ に対し, $P(k),\ P(k+1)$ を仮定して $P(k+2)$ を示す.
まず, $a_{k+2} = 2a_{k+1} - p^2a_k$ なので, 仮定 $P(k),\ P(k+1)$ および ① より a_{k+2} は整数である.
次に, a_{k+2} が p で割り切れると仮定すると, 以下 mod p において,

$$\begin{aligned} a_{k+2} \equiv 0 &\iff 2a_{k+1} - p^2a_k \equiv 0 \\ &\iff 2a_{k+1} \equiv 0 \quad (\text{仮定 } P(k) \text{ より } a_k \in \mathbb{Z} \text{ なので}) \\ &\iff a_{k+1} \equiv 0 \quad (\text{①より } \gcd(2,\,p) = 1 \text{ なので}) \end{aligned}$$

となるがこれは仮定 $P(k+1)$ に矛盾するので a_{k+2} は p で割り切れない.
よって $P(k),\ P(k+1) \Longrightarrow P(k+2)$ が成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ P(n)$ が真であることが示された.