

'15 後期 理系 ①

提出 年 月 日 名前

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \int_1^e t^{x-1} \log t \, dt$ を考える. ただし, $\log t$ は t の自然対数とし, e は自然対数の底とする.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $x > 0$ において, 関数 $g(x) = x^2 f(x) - x^2$ の極小値, およびそのときの x の値を求めよ.

'15 後期 理系 ①

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \int_1^e t^{x-1} \log t \, dt$ を考える. ただし, $\log t$ は t の自然対数とし, e は自然対数の底とする.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $x > 0$ において, 関数 $g(x) = x^2 f(x) - x^2$ の極小値, およびそのときの x の値を求めよ.

(1) $x \neq 0$ より

$$f(x) = \left[t^x \left(\frac{1}{x} \log t - \frac{1}{x^2} \right) \right]_1^e = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) - \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x} t^x \log t \right) = t^{x-1} \log t + \frac{1}{x} t^{x-1} \\ \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} t^x \right) = -\frac{1}{x} t^{x-1} \end{array} \right\}$$

(2) (1) より $g(x) = (x-1)e^x + 1 - x^2$ となるので,

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x - 2x = x(e^x - 2)$$

よって右の増減表を得る.

$$g(\log 2) = (\log 2 - 1)2 + 1 - (\log 2)^2 = -(\log 2)^2 + 2 \log 2 - 1$$

$$= -(\log 2 - 1)^2$$

なので, $g(x)$ は $x = \log 2$ のとき極小値 $-(\log 2 - 1)^2$ をとる.

x	0	...	$\log 2$...
$g'(x)$	↘	-	0	+
$g(x)$	↘	↘		↗