'15 後期　理系 ❶　　　　提出　　　年　　月　　日 名前

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \displaystyle\int_1^e t^{x-1}\log t\, dt$ を考える. ただし, $\log t$ は t の自然対数とし, e は自然対数の底とする.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $x > 0$ において, 関数 $g(x) = x^2 f(x) - x^2$ の極小値, およびそのときの x の値を求めよ.

’15 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

p を 3 以上の奇数, θ を $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたす実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = p^n \cos(n\theta)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める.

(1) a_2 を p で表せ.

(2) a_{n+2} を $a_{n+1},\ a_n,\ p$ で表せ.

(3) すべての n について a_n は p で割り切れない整数であることを示せ.

’15 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 E とその焦点 $\mathrm{F}(1\,,\,0)$ がある. E 上に点 P をとり, 直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする. F を通り直線 PF と垂直な直線と E との 2 つの交点を R, S とする.

(1) r を正の実数, θ を実数とする. 点 $(r\cos\theta+1\,,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるとき, r を θ で表せ.

(2) P が E 上を動くとき, $\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}$ の最小値を求めよ.

’15 後期　理系 ❹　　　　　　　　　　　提出　　　年　　月　　日 名前

p を正の実数とする. $a,\ b$ を実数として $x=a,\ y=(b-3)^2$ とおく. 点 $(a\,,\,b)$ が連立不等式 $0 \leqq a \leqq p,\ a \leqq b \leqq a+2$ の表す領域内を動くとき, 座標平面上の点 $(x\,,\,y)$ が動いてできる図形の面積を S とおく.

(1) $p=1$ のとき S の値を求めよ.

(2) $p=5$ のとき S の値を求めよ.

’15 後期　理系 ❶

$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^e t^{x-1}\log t\,dt$ を考える. ただし, $\log t$ は t の自然対数とし, e は自然対数の底とする.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $x>0$ において, 関数 $g(x)=x^2f(x)-x^2$ の極小値, およびそのときの x の値を求めよ.

(1) $x\neq 0$ より

$$f(x)=\left[t^x\left(\frac{1}{x}\log t-\frac{1}{x^2}\right)\right]_1^e=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\boxed{\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{x}t^x\log t\right)=t^{x-1}\log t+\dfrac{1}{x}t^{x-1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{x^2}t^x\right)=\qquad\qquad\quad -\dfrac{1}{x}t^{x-1} \end{array}\right\}$$

(2) (1) より $g(x)=(x-1)e^x+1-x^2$ となるので,

$g'(x)=e^x+(x-1)e^x-2x=x(e^x-2)$

よって右の増減表を得る.

$$g(\log 2)=(\log 2-1)2+1-(\log 2)^2=-(\log 2)^2+2\log 2-1$$

$$=-(\log 2-1)^2$$

なので, $\boxed{g(x) \text{ は } x=\log 2 \text{ のとき極小値 } -(\log 2-1)^2 \text{ をとる.}}$

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

'15 後期　理系 ❷

p を 3 以上の奇数, θ を $\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたす実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = p^n \cos(n\theta)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める.

(1) a_2 を p で表せ.

(2) a_{n+2} を $a_{n+1},\ a_n,\ p$ で表せ.

(3) すべての n について a_n は p で割り切れない整数であることを示せ.

p は 3 以上の奇数 $\cdots$①

(1) $a_2 = p^2\cos 2\theta = p^2(2\cos^2\theta - 1) = 2 - p^2$ より $\boxed{a_2 = 2 - p^2}$

(2) $\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta$ より

$$\frac{a_{n+2}}{p^{n+2}} + \frac{a_n}{p^n} = 2\cdot\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}\cdot\frac{1}{p} \iff \boxed{a_{n+2} = 2a_{n+1} - p^2 a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)}$$

(3) 「a_n は整数であり p で割り切れない」を $P(n)$ とおき, $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ P(n)$ が真であることを示す.

(i) $a_1 = p\cos\theta = 1$ なので, ① より $P(1)$ が成り立つ.
$a_2 = 2 - p^2 \equiv 2 \pmod{p}$ なので, ① より $P(2)$ が成り立つ.

(ii) $k\,(\in\mathbb{N})$ に対し, $P(k),\ P(k+1)$ を仮定して $P(k+2)$ を示す.
まず, $a_{k+2} = 2a_{k+1} - p^2 a_k$ なので, 仮定 $P(k),\ P(k+1)$ および ① より a_{k+2} は整数である.
次に, a_{k+2} が p で割り切れると仮定すると, 以下 mod p において,

$$\begin{aligned} a_{k+2} \equiv 0 &\iff 2a_{k+1} - p^2 a_k \equiv 0 \\ &\iff 2a_{k+1} \equiv 0 \quad (\text{仮定 } P(k) \text{ より } a_k \in \mathbb{Z} \text{ なので}) \\ &\iff a_{k+1} \equiv 0 \quad (\text{①より } \gcd(2,\,p) = 1 \text{ なので}) \end{aligned}$$

となるがこれは仮定 $P(k+1)$ に矛盾するので a_{k+2} は p で割り切れない.
よって $P(k),\ P(k+1) \Longrightarrow P(k+2)$ が成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により $\forall n\,(\in\mathbb{N}),\ P(n)$ が真であることが示された.

'15 後期　理系 ❸

方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 E とその焦点 $\mathrm{F}(1\,,\,0)$ がある. E 上に点 P をとり, 直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする. F を通り直線 PF と垂直な直線と E との 2 つの交点を R, S とする.

(1) r を正の実数, θ を実数とする. 点 $(r\cos\theta+1\,,\,r\sin\theta)$ が E 上にあるとき, r を θ で表せ.

(2) P が E 上を動くとき, PF + QF + RF + SF の最小値を求めよ.

(1)　点$(r\cos\theta+1\,,\,r\sin\theta)$が E 上にある

$$\iff \frac{(r\cos\theta+1)^2}{2}+(r\sin\theta)^2=1 \iff r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta+1+2r^2\sin^2\theta=2$$

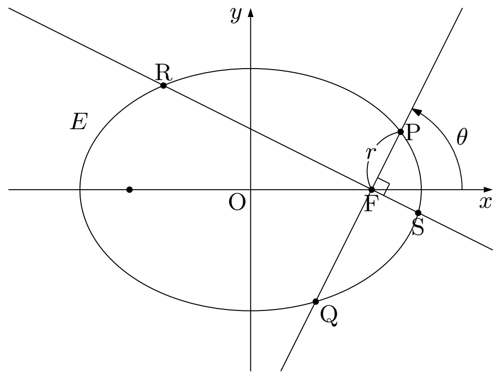
$$\iff (2-\cos^2\theta)r^2+2(\cos\theta)r-1=0 \iff \{(\sqrt{2}-\cos\theta)r+1\}\{(\sqrt{2}+\cos\theta)r-1\}=0$$

$$\iff r=-\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta},\ \frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta} \iff \boxed{r=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}}\quad (r>0\ より)\cdots ☆$$

(2) $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$ とおく.

$\overrightarrow{\mathrm{PF}}=f(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ であり, $f(\theta)>0$ なので, $\mathrm{PF}=f(\theta)$ である.

F を中心とした Q の x 軸正方向からの回転角は $\theta+\pi$ であり,
PQ $\perp$ RS より, F を中心とした R, S の x 軸正方向からの回転角は
それぞれ $\theta+\dfrac{\pi}{2}$, $\theta+\dfrac{3\pi}{2}$ としてよい.



よって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{PF}+\mathrm{QF}+\mathrm{RF}+\mathrm{SF}\\
&=f(\theta)+f(\theta+\pi)+f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta}\\
&=\frac{2\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}+\frac{2\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}\,(4-\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{(2-\cos^2\theta)(2-\sin^2\theta)}=\frac{6\sqrt{2}}{4-2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\cos^2\theta\sin^2\theta}=\frac{24\sqrt{2}}{8+\sin^2 2\theta}
\end{aligned}$$

θ を動かしたとき $\sin^2 2\theta$ のとる値の範囲は $0\leqq\sin^2 2\theta\leqq 1$ なので,

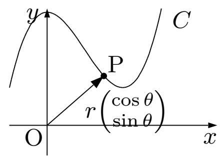
PF + QF + RF + SF の最小値は $\dfrac{24\sqrt{2}}{8+1}=\boxed{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}}$

【補足】

☆ は楕円 E の焦点の 1 つ F を極とした極方程式です. 2 次曲線では焦点を通る直線との交点は極方程式を用いると扱いやすくなります.

図形の極方程式

xy 平面において, 原点 O を「極」, x 軸を「始線」とする極座標を $(r\,,\,\theta)$ とする.
図形 C に対し, $\mathrm{P}(r\,,\,\theta)\in C$ となる r と θ の必要十分条件を「C の極方程式」という.



2 次曲線の極方程式

xy 平面において, 焦点 F を O, 準線 d を $x=k\ (k\neq 0)$, 離心率を $e\ (e>0)$ とする 2 次曲線 C の極方程式は

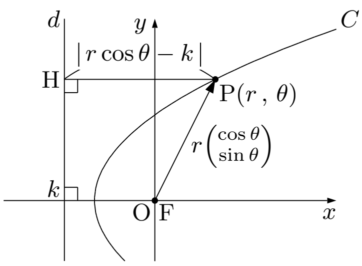
$$C:r=\frac{-ek}{1-e\cos\theta}\ または\ C:r=\frac{ek}{1+e\cos\theta}$$

(証明)

以下複号同順で

$\mathrm{P}(r\,,\,\theta)\in C \iff r=e|r\cos\theta-k| \iff r=\pm e(r\cos\theta-k) \iff r(1\mp e\cos\theta)=\mp ek$

$\iff r=\dfrac{\mp ek}{1\mp e\cos\theta}$　($k\neq 0$ より $1\mp e\cos\theta=0$ は上式を満たさないので)



$f(\theta)=\dfrac{-ek}{1-e\cos\theta}$, $g(\theta)=\dfrac{ek}{1+e\cos\theta}$ とおくと, $g(\theta+\pi)=\dfrac{ek}{1-e\cos\theta}=-f(\theta)$ より,
点 $(r_0\,,\,\theta_0)$ が $r=f(\theta)$ 上にあるとき, 点 $(-r_0\,,\,\theta_0+\pi)$ は $r=g(\theta)$ 上にある.
極座標において, 2 点 $(r_0\,,\,\theta_0)$, $(-r_0\,,\,\theta_0+\pi)$ は同じ点なので, 2 曲線 $r=f(\theta)$ と $r=g(\theta)$ は同じ曲線である.

よって $C:r=\dfrac{-ek}{1-e\cos\theta}$ または $C:r=\dfrac{ek}{1+e\cos\theta}$

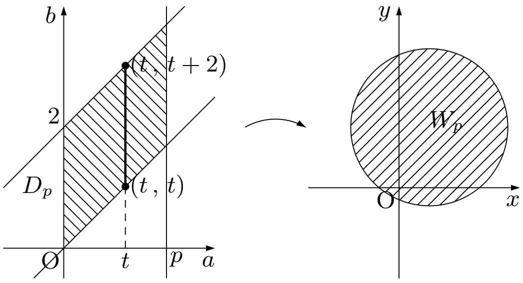
'15 後期　理系 ❹

p を正の実数とする. $a,\ b$ を実数として $x=a,\ y=(b-3)^2$ とおく. 点 $(a\,,\,b)$ が連立不等式 $0 \leqq a \leqq p,\ a \leqq b \leqq a+2$ の表す領域内を動くとき, 座標平面上の点 $(x\,,\,y)$ が動いてできる図形の面積を S とおく.

(1) $p=1$ のとき S の値を求めよ.　　(2) $p=5$ のとき S の値を求めよ.

$D_p:\begin{cases}0 \leqq a \leqq p \\ a \leqq b \leqq a+2\end{cases}$ とし, 点 $(a\,,\,b)$ が D 内を動くときに $\begin{cases}x=a \\ y=(b-3)^2\end{cases}$ によって定まる点 $(x\,,\,y)$ の軌跡を W_p とする.

【方針 1】順像法

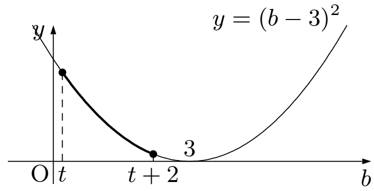


(1) $p=1$ のとき

$a=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で a を固定すると b の値域は $t \leqq b \leqq t+2$ である.

このとき $x=t$ であり,

$t \leqq b \leqq t+2 \leqq 3$ なので, 右図より y の値域は $(t-1)^2 \leqq y \leqq (t-3)^2$ となる.



次に a を $0 \leqq a \leqq 1$ で動かすと, 点 $(x\,,\,y)$ は $\begin{cases}x=a \\ (a-1)^2 \leqq y \leqq (a-3)^2\end{cases}$ を満たして動くので,

$W_1:(x-1)^2 \leqq y \leqq (x-3)^2\quad(0 \leqq x \leqq 1)$ となる.

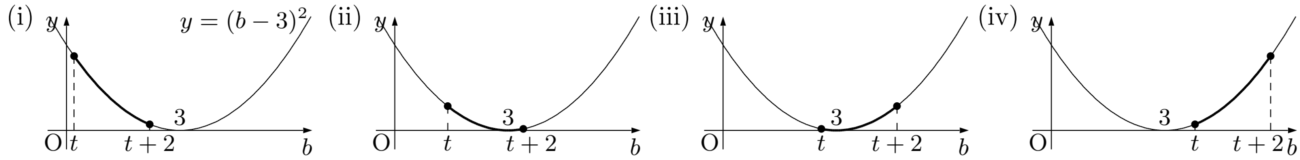
よって $S=\displaystyle\int_0^1\{(x-3)^2-(x-1)^2\}dx=\Big[\frac{1}{3}(x-3)^3-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}(-8+27)-\frac{1}{3}(0+1)=\boxed{6}$

(2) $p=5$ のとき

$a=t\ (0 \leqq t \leqq 5)$ で a を固定すると b の値域は $t \leqq b \leqq t+2$ である.

このとき $x=t$ であり,

$t \leqq b \leqq t+2 \leqq 7$ なので, 下図より y の値域は



(i)　$0 \leqq t \wedge t+2 \leqq 3 \iff 0 \leqq t \leqq 1$ のとき $(t-1)^2 \leqq y \leqq (t-3)^2$ となる.

(ii) $t+1 \leqq 3 \wedge 3 \leqq t+2 \iff 1 \leqq t \leqq 2$ のとき　$0 \leqq y \leqq (t-3)^2$ となる.

(iii)　$t \leqq 3 \wedge 3 \leqq t+1 \iff 2 \leqq t \leqq 3$ のとき　$0 \leqq y \leqq (t-1)^2$ となる.

(iv)　$3 \leqq t \leqq 5$ のとき $(t-3)^2 \leqq y \leqq (t-1)^2$ となる.

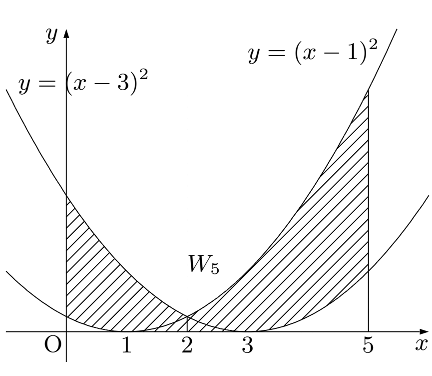
次に a を $0 \leqq a \leqq 5$ で動かすことにより,

$$W_5:\begin{cases}(x-1)^2 \leqq y \leqq (x-3)^2 & (0 \leqq x \leqq 1\ \text{のとき}) \\ 0 \leqq y \leqq (x-3)^2 & (1 \leqq x \leqq 2\ \text{のとき}) \\ 0 \leqq y \leqq (x-1)^2 & (2 \leqq x \leqq 3\ \text{のとき}) \\ (x-3)^2 \leqq y \leqq (x-1)^2 & (3 \leqq x \leqq 5\ \text{のとき})\end{cases}$$ となる.

よって

$$S=\int_0^2(x-3)^2dx-\int_0^1(x-1)^2dx+\int_2^5(x-1)^2dx-\int_3^5(x-3)^2dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}(x-3)^3\Big]_0^2-\Big[\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_2^5-\Big[\frac{1}{3}(x-3)^3\Big]_3^5$$
$$=\frac{1}{3}(-1+27)-\frac{1}{3}(0+1)+\frac{1}{3}(64-1)-\frac{1}{3}(8-0)=\boxed{\frac{80}{3}}$$

W_5 を図示する必要はないが, 右図のようになる.



'15 後期　理系 ❹

【方針 2】逆像法

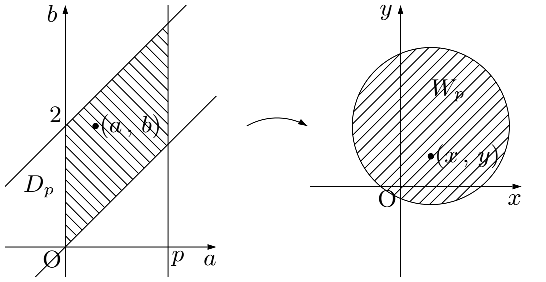
$$(x,\,y)\in W_p \iff \exists\,(a,\,b)\,(\in D_p),\ x=a\wedge y=(b-3)^2$$

$$\iff \exists\,a,\,b\begin{cases} x=a\wedge y=(b-3)^2\\ 0\leqq a\leqq p\wedge a\leqq b\leqq a+2\end{cases}$$

$$\iff \exists\,b\begin{cases} y=(b-3)^2\\ 0\leqq x\leqq p\wedge x\leqq b\leqq x+2\end{cases}$$

$\iff b$ の 2 次方程式 $y=(b-3)^2$ が
$x\leqq b\leqq x+2$ (ただし $0\leqq x\leqq p$) に実数解を持つ

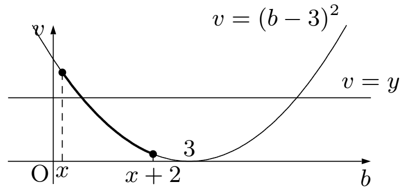
$\iff bv$ 平面において $v=(b-3)^2$ と $v=y$ のグラフが
$x\leqq b\leqq x+2$ (ただし $0\leqq x\leqq p$) に交点を持つ $\cdots$ ☆



(1) $p=1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ より $0\leqq x\leqq b\leqq x+2\leqq 3$ なので, 右図より

☆ $\iff (x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2\quad (0\leqq x\leqq 1)$ となる.

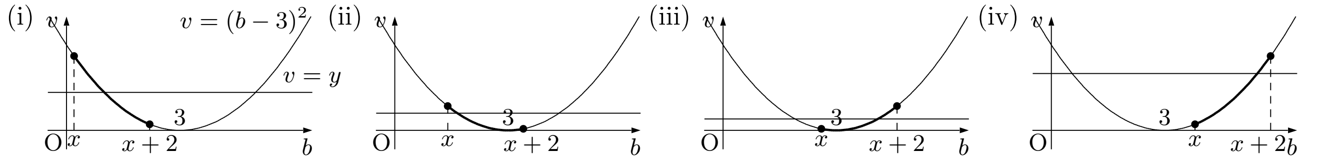


よって $W_1 : (x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2\wedge 0\leqq x\leqq 1$ なので,

$$S=\int_0^1\{(x-3)^2-(x-1)^2\}dx=\left[\frac{1}{3}(x-3)^3-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{1}{3}(-8+27)-\frac{1}{3}(0+1)=\boxed{6}$$

(2) $p=5$ のとき

$0\leqq x\leqq 5$ より $0\leqq x\leqq b\leqq x+2\leqq 7$ なので, 下図より



(i) $0\leqq x\wedge x+2\leqq 3\iff 0\leqq x\leqq 1$ のとき ☆ $\iff (x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2$ となる.

(ii) $x+1\leqq 3\wedge 3\leqq x+2\iff 1\leqq x\leqq 2$ のとき ☆ $\iff 0\leqq y\leqq (x-3)^2$ となる.

(iii) $x\leqq 3\wedge 3\leqq x+1\iff 2\leqq x\leqq 3$ のとき ☆ $\iff 0\leqq y\leqq (x-1)^2$ となる.

(iv) $3\leqq x\leqq 5$ のとき ☆ $\iff (x-3)^2\leqq y\leqq (x-1)^2$ となる.

よって $W_5 :$
$$[\,(x-1)^2\leqq y\leqq (x-3)^2\wedge 0\leqq x\leqq 1\,]$$
$$\vee\,[\,0\leqq y\leqq (x-3)^2\wedge 1\leqq x\leqq 2\,]$$
$$\vee\,[\,0\leqq y\leqq (x-1)^2\wedge 2\leqq x\leqq 3\,]$$
$$\vee\,[\,(x-3)^2\leqq y\leqq (x-1)^2\wedge 3\leqq x\leqq 5\,]$$

なので,

$$S=\int_0^2(x-3)^2dx-\int_0^1(x-1)^2dx+\int_2^5(x-1)^2dx-\int_3^5(x-3)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_0^2-\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_2^5-\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_3^5$$
$$=\frac{1}{3}(-1+27)-\frac{1}{3}(0+1)+\frac{1}{3}(64-1)-\frac{1}{3}(8-0)=\boxed{\frac{80}{3}}$$