’14 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

(1) すべての正の実数 x に対して不等式 $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成立するような実数 a のうちで最大となるものを求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ.

(3) 円周率 π と $\log 27$ の大小を判定せよ. ただし $\log x$ は x の自然対数とする.

'14 後期　理系 ❹

(1) すべての正の実数 x に対して不等式 $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成立するような実数 a のうちで最大となるものを求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ.

(3) 円周率 π と $\log 27$ の大小を判定せよ. ただし $\log x$ は x の自然対数とする.

(1) $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x} \iff a \leqq x + \dfrac{1}{x}$　$(x^2+1>0$ より$)$ であり, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと,

$\forall x\,(>0),\ f(x) \geqq a \iff \underline{a \leqq (f(x) \text{ の } x>0 \text{ における最小値})}$①.

$x>0$ より相加相乗平均の不等式により $f(x) \geqq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$ が成り立ち,

$x = \dfrac{1}{x} \iff x = 1$ $(x>0$ より$)$ のとき等号が成り立つので, $f(x)$ の $x>0$ における最小値は $f(1)=2$.

よって ① $\iff a \leqq 2$ なのでこれを満たす a の最大値は $\boxed{a=2}$.

【別解】

$\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x} \iff x^2 - ax + 1 \geqq 0$　$(x^2+1,\ x>0$ より$)$ であり, $g(x) = x^2 - ax + 1$ とおくと,

$g(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + 1 - \dfrac{a^2}{4}$ なので, 右図より,

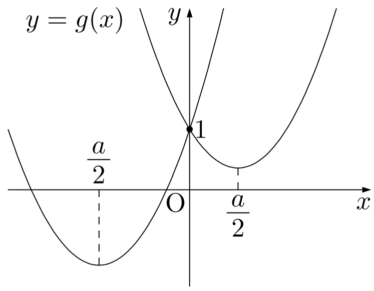
$$\forall x\,(>0),\ g(x) \geqq 0 \iff \frac{a}{2} \leqq 0 \vee \left[\,\frac{a}{2} \geqq 0 \wedge 1 - \frac{a^2}{4} \geqq 0\,\right].$$

$$\iff a \leqq 0 \vee [\,a \geqq 0 \wedge -2 \leqq a \leqq 2\,]$$

$$\iff a \leqq 0 \vee 0 \leqq a \leqq 2$$

$$\iff a \leqq 2$$

これを満たす a の最大値は $\boxed{a=2}$.



(2)

$x = \tan\theta$ とおくと, $dx = (1+\tan^2\theta)d\theta$, $\begin{array}{c||c} x & 1 \to \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{3} \end{array}$ なので,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12}}.$$

One Point

三角関数の逆関数の微分 $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < \sin^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ は有名です.

これを用いれば $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \Big[\,\tan^{-1}x\,\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ と求めることができます.

(3) (1) より正の x に対して $\dfrac{2}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x} \cdots$ ② なので,

$$2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x}$$ (②の等号は $x=1$ のときのみ成り立つので左式の等号は成り立たない)

$$\iff 2 \cdot \frac{\pi}{12} < \Big[\,\log|x|\,\Big]_1^{\sqrt{3}} \iff \pi < 6\log\sqrt{3} \iff \boxed{\pi < \log 27}$$

One Point

参考までに $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ と $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフは右のようになります.

$1 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ では振る舞いが近いことが読み取れます.

また $\log 27 = 3.2958\cdots$ という値になります.