’14 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日　名前

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ と直線 $y=ax+b$ が共有点を持つような $(a\,,\,b)$ 全体からなる領域 E を ab 平面上に図示せよ.

(2) (1) の領域を $(a\,,\,b)$ が動くとき, $(a-15)^2+b^2$ の最小値, およびそのときの $(a\,,\,b)$ を求めよ.

’14 後期　理系 ❸

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ と直線 $y=ax+b$ が共有点を持つような $(a\,,\,b)$ 全体からなる領域 E を ab 平面上に図示せよ.

(2) (1) の領域を $(a\,,\,b)$ が動くとき, $(a-15)^2+b^2$ の最小値, およびそのときの $(a\,,\,b)$ を求めよ.

(1) $a,\ b\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\text{双曲線}\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\ \text{と直線}\ y=ax+b\ \text{が共有点を持つ}.\\
\iff&\exists x,\ y\ (\in\mathbb{R}),\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\wedge y=ax+b\\
\iff&\exists x,\ y\ (\in\mathbb{R}),\ \frac{x^2}{4}-\frac{(ax+b)^2}{9}=1\wedge y=ax+b\\
\iff&\underline{\exists x\ (\in\mathbb{R}),\ (4a^2-9)x^2+8abx+4b^2+36=0}\ ①
\end{aligned}$$

(i) $4a^2-9=0\iff a=\pm\dfrac{3}{2}$ のとき,

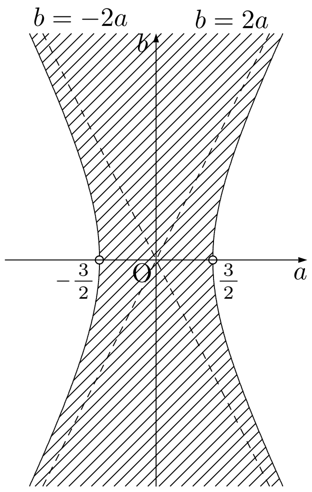
① $\iff\exists x\ (\in\mathbb{R}),\ \pm12bx+4b^2+36=0\iff b\neq0$

(ii) $4a^2-9\neq0\iff a\neq\pm\dfrac{3}{2}$ のとき,

① $\iff\dfrac{(\text{判別式})}{4}=(4ab)^2-(4a^2-9)(4b^2+36)\geqq0\iff\dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{b^2}{9}\leqq1$

(i),(ii) より ① $\iff\begin{cases}a=\pm\dfrac{3}{2}\\ b\neq0\end{cases}\vee\begin{cases}a\neq\pm\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{b^2}{9}\leqq1\end{cases}$ であり,

図示すると右図斜線部. ただし, 境界は 2 点 $\left(\pm\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)$ のみ含まず.



'14 後期　理系 ❸

(2) $f(a,\,b)=(a-15)^2+b^2$ とおき, 定義域 E に対する $z=f(a,\,b)$ の値域を W とする.

【方針 1】順像法

E 内において $a=t$ と固定すると, $z=f(t,\,b)=b^2+(t-15)^2$ は b の関数であり,

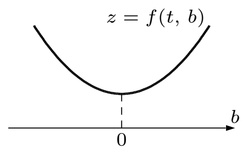
(i) $-\dfrac{3}{2}<t<\dfrac{3}{2}$ のとき, b の範囲は全実数.

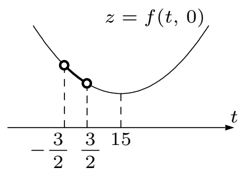
よって $f(t,\,0)\leqq f(t,\,b)\Longleftrightarrow (t-15)^2\leqq f(t,\,b)$

次に t を動かすと $f(t,0)$ の下限は

$f\left(\dfrac{3}{2},0\right)=\left(\dfrac{3}{2}-15\right)^2=225-45+\dfrac{9}{4}=182+\dfrac{1}{4}.$

よって $-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ のときの z の値域は $182+\dfrac{1}{4}<z$



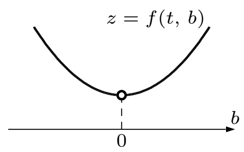


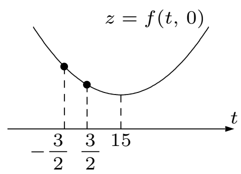
(ii) $t=\pm\dfrac{3}{2}$ のとき, b の範囲は 0 以外の全実数.

よって $f(t,\,0)<f(t,\,b)\Longleftrightarrow (t-15)^2<f(t,\,b)$

次に t を動かすと $f(t,0)$ の最小値は $f\left(\dfrac{3}{2},0\right)=182+\dfrac{1}{4}.$

よって $a=\pm\dfrac{3}{2}$ のときの z の値域は $182+\dfrac{1}{4}<z$





(iii) $t<-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<t$ のとき,

b の範囲は $\dfrac{4t^2}{9}-\dfrac{b}{9}^2\leqq 1\Longleftrightarrow b^2\geqq 4t^2-9$

$\Longleftrightarrow b\leqq -\sqrt{4t^2-9}\,,\ \sqrt{4t^2-9}\ \leqq b$

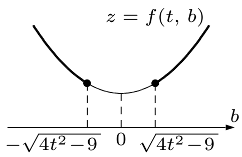
よって $f(t,\,\pm\sqrt{4t^2-9}\,)\leqq f(t,\,b)\Longleftrightarrow (4t^2-9)+(t-15)^2\leqq f(t,\,b)$

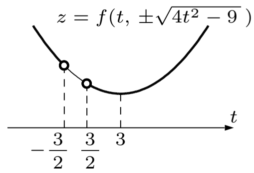
$\Longleftrightarrow 5t^2-30t+216\leqq f(t,\,b)$

$\Longleftrightarrow 5(t-3)^2+171\leqq f(t,\,b)$

次に t を動かすと $f(t,\,\pm\sqrt{4t^2-9}\,)$ の最小値は $f(3,\,\pm3\sqrt{3}\,)=171.$

よって $a<-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<a$ のときの z の値域は $171\leqq z$





(i)〜(iii) より $W:171\leqq z$ であるので $\boxed{f(a,\,b)\text{ の最小値は }171\ \ ((a,\,b)=(3,\,\pm3\sqrt{3}\,)\text{ のとき})}$

【方針 2】逆像法

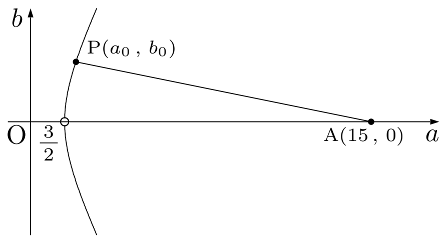
$k\in W\Longleftrightarrow \exists(a,\,b)\ (\in E),\ k=(a-15)^2+b^2$

$\Longleftrightarrow$ 領域 E と図形 $C_k:(a-15)^2+b^2=k$ が共有点を持つ. $\cdots$ ②

$k\leqq 0$ のとき②を満たさないので $k>0$ のときのみ考えればよい.

②を満たす k の最小値は, E の境界線 $\dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{b^2}{9}=1$ のうち,

$a>\dfrac{3}{2}$ の部分の点 $\mathrm{P}(a_0\,,\,b_0)$ と点 $\mathrm{A}(15\,,\,0)$ の距離の 2 乗の最小値である.

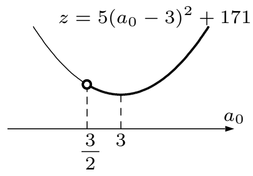


$\mathrm{AP}^2=(a_0-15)^2+{b_0}^2$

$=(a_0-15)^2+(4{a_0}^2-9)\quad\left(\dfrac{4{a_0}^2}{9}-\dfrac{{b_0}^2}{9}=1\text{ より}\right)$

$=5{a_0}^2-30a_0+216$

$=5(a_0-3)^2+171$



$a_0>\dfrac{3}{2}$ なので右図より AP^2 は $a_0=3$ のとき最小値は 171 をとる.

またこのとき ${b_0}^2=4\cdot 3^2-9=27$ より $b_0=\pm3\sqrt{3}$.

以上より ② $\Longleftrightarrow 171\leqq k.$

よって $W:171\leqq z$ であるので $\boxed{f(a,\,b)\text{ の最小値は }171\ \ ((a,\,b)=(3,\,\pm3\sqrt{3}\,)\text{ のとき})}$