'14 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

$f(x)=ax(1-x)$ に対し, $g(x)=f(f(x))$ とする. ここで a は正の実数とする.

(1) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を a の関数とみなす. その関数の最大値, およびそのときの a を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において, $g(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲を動くとき, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値が最大となる a を求めよ.

'14 後期　理系　❷

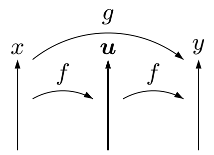
$f(x)=ax(1-x)$ に対し, $g(x)=f(f(x))$ とする. ここで a は正の実数とする.

(1) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を a の関数とみなす. その関数の最大値, およびそのときの a を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において, $g(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲を動くとき, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値が最大となる a を求めよ.

【方針】関数 $f(f(x))=a\{ax(1-x)\}\{1-ax(1-x)\}$ の式を相手にしない.
$u=f(x)$ とおくと, $y=g(x)=f(u)$.



(1) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $u=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}$ より,

$y=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{a}{4}\right)=-\dfrac{1}{16}a^2(a-4)=-\dfrac{1}{16}(a^3-4a^2)$.

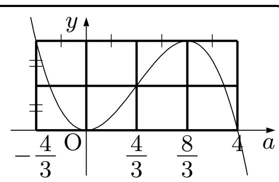
$\dfrac{dy}{da}=-\dfrac{1}{16}(3a^2-8a)=-\dfrac{1}{16}a(3a-8)$ より右の増減表を得る.

よって $\boxed{\text{最大値は } \dfrac{16}{27}\ \left(a=\dfrac{8}{3}\text{のとき}\right)}$

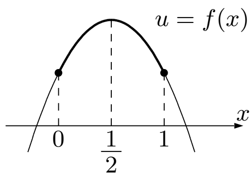
a	0	$\cdots$	$\dfrac{8}{3}$	$\cdots$
$\dfrac{dy}{da}$	(0)	$+$	0	$-$
y	(0)	$\nearrow$	$\dfrac{16}{27}$	$\searrow$

One Point

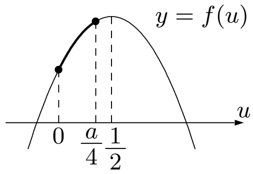
3 次関数のグラフの特徴から, $a=\dfrac{8}{3}$ で最大になることは
微分する前からわかっていなくてはいけないことです.



(2) $u=f(x)=-a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{a}{4}$ であり, $a>0$ よりグラフは右図のようになる.
よって $0 \leqq x \leqq 1$ における u の値域は $0 \leqq u \leqq \dfrac{a}{4}$.



次に $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $u=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}$ より,
求めるのは $0 \leqq u \leqq \dfrac{a}{4}$ において $y=f(u)$ が $u=\dfrac{a}{4}$ で最大値をとるような a の範囲.
$y=f(u)=-a\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{a}{4}$ であり, $a>0$ よりグラフは右図のようになる.
よって求める a の範囲は $0<\dfrac{a}{4} \leqq \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \boxed{0<a \leqq 2}$



(3) (1) の増減表より, $0<a \leqq 2\ \left(<\dfrac{8}{3}\right)$ における右の増減表を得るので,
$g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ が最大になる a の値は $\boxed{a=2}$

a	0	$\cdots$	2
$\dfrac{dy}{da}$	(0)	$+$	$+$
y	(0)	$\nearrow$	