'14 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日　名前

p を素数とする. 整数を係数とする n 次多項式 $f(x)$ $(n \geqq 1)$ で, 以下の 3 条件を同時に満たしているものをすべて求めよ.

· x^n の係数は 1.

· $f(0) = p$.

· 方程式 $f(x) = 0$ の解は相異なる n 個の整数.

'14 後期　理系　❶

p を素数とする. 整数を係数とする n 次多項式 $f(x)$ $(n \geqq 1)$ で, 以下の 3 条件を同時に満たしているものをすべて求めよ.

· x^n の係数は 1.

· $f(0) = p$.

· 方程式 $f(x) = 0$ の解は相異なる n 個の整数.

$f(x) = 0$ の異なる n 個の整数解を $-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \cdots,\ -\alpha_n$ とすると, $f(x)$ の最高次係数が 1 であることから,
$f(x) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)$ となるので, $f(0) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.
よって, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = p$　($\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$は相異なる整数) を満たす集合 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ を求めればよい.
p は素数なので, p の約数は負の数まで含めても $\pm 1,\ \pm p$ のみ.
よって求める集合は $\{p\},\ \{1,\ p\},\ \{-1,\ -p\},\ \{1,\ -1,\ -p\}$ に限られる.
以上より $\boxed{f(x) = x+p,\ (x+1)(x+p),\ (x-1)(x-p),\ (x+1)(x-1)(x-p)}$