’14 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

p を素数とする. 整数を係数とする n 次多項式 $f(x)$ $(n \geqq 1)$ で, 以下の 3 条件を同時に満たしているものをすべて求めよ.

・ x^n の係数は 1.

・ $f(0) = p$.

・ 方程式 $f(x) = 0$ の解は相異なる n 個の整数.

’14 後期　理系 ❷　　　　　　　　　　　　提出　　　年　　月　　日 名前

$f(x) = ax(1-x)$ に対し, $g(x) = f(f(x))$ とする. ここで a は正の実数とする.

(1) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を a の関数とみなす. その関数の最大値, およびそのときの a を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において, $g(x)$ が $x = \dfrac{1}{2}$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲を動くとき, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値が最大となる a を求めよ.

’14 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ と直線 $y = ax + b$ が共有点を持つような (a, b) 全体からなる領域 E を ab 平面上に図示せよ.

(2) (1) の領域を (a, b) が動くとき, $(a - 15)^2 + b^2$ の最小値, およびそのときの (a, b) を求めよ.

'14 後期　理系 ❹　　　　　提出　　　年　　月　　日　名前

(1) すべての正の実数 x に対して不等式 $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成立するような実数 a のうちで最大となるものを求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ.

(3) 円周率 π と $\log 27$ の大小を判定せよ. ただし $\log x$ は x の自然対数とする.

'14 後期　理系　❶

p を素数とする. 整数を係数とする n 次多項式 $f(x)$ $(n \geqq 1)$ で, 以下の 3 条件を同時に満たしているものをすべて求めよ.

・ x^n の係数は 1.

・ $f(0) = p$.

・ 方程式 $f(x) = 0$ の解は相異なる n 個の整数.

$f(x) = 0$ の異なる n 個の整数解を $-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \cdots,\ -\alpha_n$ とすると, $f(x)$ の最高次係数が 1 であることから,
$f(x) = (x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)$ となるので, $f(0) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.
よって, $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = p$　($\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$は相異なる整数) を満たす集合 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ を求めればよい.
p は素数なので, p の約数は負の数まで含めても $\pm 1,\ \pm p$ のみ.
よって求める集合は $\{p\},\ \{1,\ p\},\ \{-1,\ -p\},\ \{1,\ -1,\ -p\}$ に限られる.
以上より $\boxed{f(x) = x+p,\ (x+1)(x+p),\ (x-1)(x-p),\ (x+1)(x-1)(x-p)}$

'14 後期　理系 ❷

$f(x)=ax(1-x)$ に対し, $g(x)=f(f(x))$ とする. ここで a は正の実数とする.

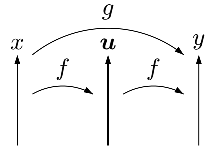
(1) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を a の関数とみなす. その関数の最大値, およびそのときの a を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において, $g(x)$ が $x=\dfrac{1}{2}$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲を動くとき, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値が最大となる a を求めよ.

【方針】関数 $\boldsymbol{f(f(x))=a\{ax(1-x)\}\{1-ax(1-x)\}}$ の式を相手にしない.

$u=f(x)$ とおくと, $y=g(x)=f(u)$.



(1) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $u=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}$ より,

$y=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{a}{4}\right)=-\dfrac{1}{16}a^2(a-4)=-\dfrac{1}{16}(a^3-4a^2)$.

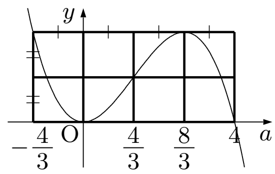
$\dfrac{dy}{da}=-\dfrac{1}{16}(3a^2-8a)=-\dfrac{1}{16}a(3a-8)$ より右の増減表を得る.

よって $\boxed{最大値は\ \dfrac{16}{27}\ \left(a=\dfrac{8}{3}のとき\right)}$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{8}{3}$	$\cdots$
$\dfrac{dy}{da}$	(0)	$+$	0	$-$
y	(0)	↗	$\dfrac{16}{27}$	↘

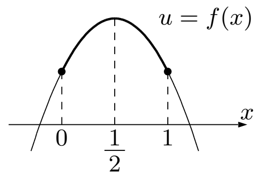
One Point

3 次関数のグラフの特徴から, $a=\dfrac{8}{3}$ で最大になることは
微分する前からわかっていなくてはいけないことです.



(2) $u=f(x)=-a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{a}{4}$ であり, $a>0$ よりグラフは右図のようになる.

よって $0 \leqq x \leqq 1$ における u の値域は $0 \leqq u \leqq \dfrac{a}{4}$.

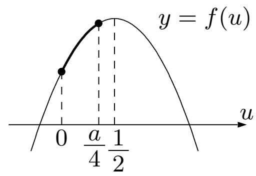


次に $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $u=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}$ より,

求めるのは $0 \leqq u \leqq \dfrac{a}{4}$ において $y=f(u)$ が $u=\dfrac{a}{4}$ で最大値をとるような a の範囲.

$y=f(u)=-a\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{a}{4}$ であり, $a>0$ よりグラフは右図のようになる.

よって求める a の範囲は $0<\dfrac{a}{4} \leqq \dfrac{1}{2} \iff \boxed{0<a \leqq 2}$



(3) (1) の増減表より, $0<a \leqq 2\ \left(<\dfrac{8}{3}\right)$ における右の増減表を得るので,

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ が最大になる a の値は $\boxed{a=2}$

a	0	$\cdots$	2
$\dfrac{dy}{da}$	(0)	$+$	$+$
y	(0)	↗	

'14 後期　理系 ❸

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ と直線 $y=ax+b$ が共有点を持つような $(a\,,\,b)$ 全体からなる領域 E を ab 平面上に図示せよ.

(2) (1) の領域を $(a\,,\,b)$ が動くとき, $(a-15)^2+b^2$ の最小値, およびそのときの $(a\,,\,b)$ を求めよ.

(1) $a,\ b\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\text{双曲線}\,\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\ \text{と直線}\ y=ax+b\ \text{が共有点を持つ.}\\ \iff&\exists x,\ y\ (\in\mathbb{R}),\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\wedge y=ax+b\\ \iff&\exists x,\ y\ (\in\mathbb{R}),\ \frac{x^2}{4}-\frac{(ax+b)^2}{9}=1\wedge y=ax+b\\ \iff&\underline{\exists x\ (\in\mathbb{R}),\ (4a^2-9)x^2+8abx+4b^2+36=0}\text{①}\end{aligned}$$

(i) $4a^2-9=0\iff a=\pm\dfrac{3}{2}$ のとき,

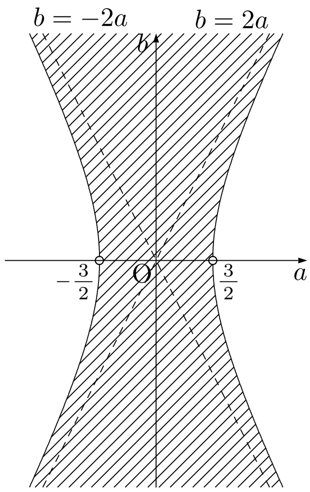
① $\iff\exists x\ (\in\mathbb{R}),\ \pm12bx+4b^2+36=0\iff b\neq0$

(ii) $4a^2-9\neq0\iff a\neq\pm\dfrac{3}{2}$ のとき,

① $\iff\dfrac{(\text{判別式})}{4}=(4ab)^2-(4a^2-9)(4b^2+36)\geqq0\iff\dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{b^2}{9}\leqq1$

(i),(ii) より ① $\iff\begin{cases}a=\pm\dfrac{3}{2}\\ b\neq0\end{cases}\vee\begin{cases}a\neq\pm\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{b^2}{9}\leqq1\end{cases}$ であり,

図示すると右図斜線部. ただし, 境界は 2 点 $\left(\pm\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)$ のみ含まず.



’14 後期　理系　❸

(2) $f(a,\,b)=(a-15)^2+b^2$ とおき, 定義域 E に対する $z=f(a,\,b)$ の値域を W とする.

【方針 1】順像法

E 内において $a=t$ と固定すると, $z=f(t,\,b)=b^2+(t-15)^2$ は b の関数であり,

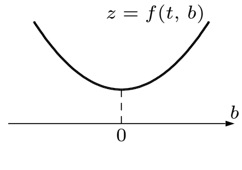
(i) $-\dfrac{3}{2}<t<\dfrac{3}{2}$ のとき, b の範囲は全実数.

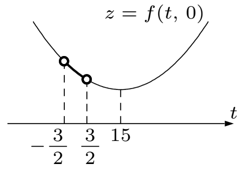
よって $f(t,\,0)\leqq f(t,\,b)\Longleftrightarrow (t-15)^2\leqq f(t,\,b)$

次に t を動かすと $f(t,0)$ の下限は

$f\left(\dfrac{3}{2},0\right)=\left(\dfrac{3}{2}-15\right)^2=225-45+\dfrac{9}{4}=182+\dfrac{1}{4}$.

よって $-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ のときの z の値域は $182+\dfrac{1}{4}<z$



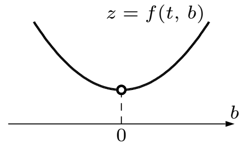


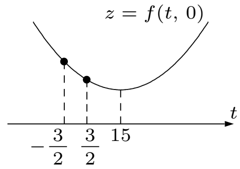
(ii) $t=\pm\dfrac{3}{2}$ のとき, b の範囲は 0 以外の全実数.

よって $f(t,\,0)<f(t,\,b)\Longleftrightarrow (t-15)^2<f(t,\,b)$

次に t を動かすと $f(t,0)$ の最小値は $f\left(\dfrac{3}{2},0\right)=182+\dfrac{1}{4}$.

よって $a=\pm\dfrac{3}{2}$ のときの z の値域は $182+\dfrac{1}{4}<z$

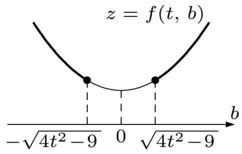




(iii) $t<-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<t$ のとき,

b の範囲は $\dfrac{4t^2}{9}-\dfrac{b}{9}^2\leqq 1\Longleftrightarrow b^2\geqq 4t^2-9$

$\Longleftrightarrow b\leqq -\sqrt{4t^2-9}\,,\ \sqrt{4t^2-9}\ \leqq b$



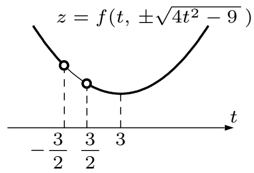
よって $f(t,\,\pm\sqrt{4t^2-9}\,)\leqq f(t,\,b)\Longleftrightarrow (4t^2-9)+(t-15)^2\leqq f(t,\,b)$

$\Longleftrightarrow 5t^2-30t+216\leqq f(t,\,b)$

$\Longleftrightarrow 5(t-3)^2+171\leqq f(t,\,b)$

次に t を動かすと $f(t,\,\pm\sqrt{4t^2-9}\,)$ の最小値は $f(3,\,\pm3\sqrt{3}\,)=171$.

よって $a<-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}<a$ のときの z の値域は $171\leqq z$



(i)〜(iii) より $W:171\leqq z$ であるので $\boxed{f(a,\,b)\text{ の最小値は }171\ \ ((a,\,b)=(3,\,\pm3\sqrt{3}\,)\text{ のとき})}$

【方針 2】逆像法

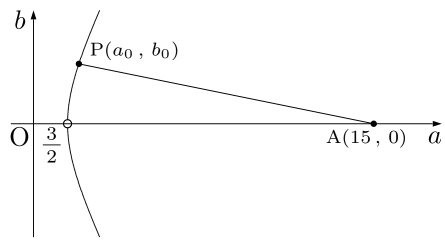
$k\in W\Longleftrightarrow \exists(a,\,b)\ (\in E),\ k=(a-15)^2+b^2$

$\Longleftrightarrow$ 領域 E と図形 $C_k:(a-15)^2+b^2=k$ が共有点を持つ. $\cdots$ ②

$k\leqq 0$ のとき②を満たさないので $k>0$ のときのみ考えればよい.

②を満たす k の最小値は, E の境界線 $\dfrac{4a^2}{9}-\dfrac{b^2}{9}=1$ のうち,

$a>\dfrac{3}{2}$ の部分の点 $\mathrm{P}(a_0\,,\,b_0)$ と点 $\mathrm{A}(15\,,\,0)$ の距離の 2 乗の最小値である.

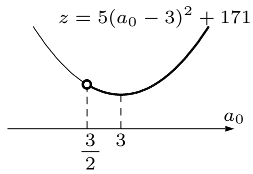


$\mathrm{AP}^2=(a_0-15)^2+{b_0}^2$

$=(a_0-15)^2+(4{a_0}^2-9)\ \ \left(\dfrac{4{a_0}^2}{9}-\dfrac{{b_0}^2}{9}=1\text{ より}\right)$

$=5{a_0}^2-30a_0+216$

$=5(a_0-3)^2+171$



$a_0>\dfrac{3}{2}$ なので右図より AP^2 は $a_0=3$ のとき最小値は 171 をとる.

またこのとき ${b_0}^2=4\cdot 3^2-9=27$ より $b_0=\pm3\sqrt{3}$.

以上より ② $\Longleftrightarrow 171\leqq k$.

よって $W:171\leqq z$ であるので $\boxed{f(a,\,b)\text{ の最小値は }171\ \ ((a,\,b)=(3,\,\pm3\sqrt{3}\,)\text{ のとき})}$

'14 後期　理系 ❹

(1) すべての正の実数 x に対して不等式 $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x}$ が成立するような実数 a のうちで最大となるものを求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ.

(3) 円周率 π と $\log 27$ の大小を判定せよ. ただし $\log x$ は x の自然対数とする.

(1) $\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x} \iff a \leqq x + \dfrac{1}{x}$ $\quad (x^2+1>0$ より$)$ であり, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと,

$\forall x\,(>0),\ f(x) \geqq a \iff \underline{a \leqq (f(x) \text{ の } x>0 \text{ における最小値})}_{①}$.

$x>0$ より相加相乗平均の不等式により $f(x) \geqq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$ が成り立ち,

$x = \dfrac{1}{x} \iff x = 1$ $(x>0$ より$)$ のとき等号が成り立つので, $f(x)$ の $x>0$ における最小値は $f(1)=2$.

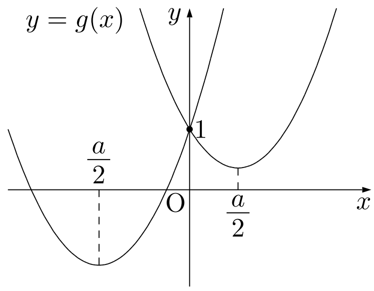
よって ① $\iff a \leqq 2$ なのでこれを満たす a の最大値は $\boxed{a=2}$.

【別解】

$\dfrac{a}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x} \iff x^2 - ax + 1 \geqq 0$ $\quad (x^2+1,\ x>0$ より$)$ であり, $g(x) = x^2 - ax + 1$ とおくと,

$g(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + 1 - \dfrac{a^2}{4}$ なので, 右図より,

$$
\begin{aligned}
\forall x\,(>0),\ g(x) \geqq 0 &\iff \frac{a}{2} \leqq 0 \vee \left[\,\frac{a}{2} \geqq 0 \wedge 1 - \frac{a^2}{4} \geqq 0\,\right]. \\
&\iff a \leqq 0 \vee [\,a \geqq 0 \wedge -2 \leqq a \leqq 2\,] \\
&\iff a \leqq 0 \vee 0 \leqq a \leqq 2 \\
&\iff a \leqq 2
\end{aligned}
$$



これを満たす a の最大値は $\boxed{a=2}$.

(2)

$x = \tan\theta$ とおくと, $dx = (1+\tan^2\theta)d\theta$, $\begin{array}{c||ccc} x & 1 & \to & \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \to & \frac{\pi}{3} \end{array}$ なので,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12}}.$$

One Point

三角関数の逆関数の微分 $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < \sin^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ は有名です.

これを用いれば $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \Big[\,\tan^{-1}x\,\Big]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ と求めることができます.

(3) (1) より正の x に対して $\dfrac{2}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{x} \cdots$ ② なので,

$$2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x} \quad (\text{②の等号は } x=1 \text{ のときのみ成り立つので左式の等号は成り立たない})$$

$$\iff 2\cdot\frac{\pi}{12} < \Big[\,\log|x|\,\Big]_1^{\sqrt{3}} \iff \pi < 6\log\sqrt{3} \iff \boxed{\pi < \log 27}$$

One Point

参考までに $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ と $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフは右のようになります.
$1 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ では振る舞いが近いことが読み取れます.
また $\log 27 = 3.2958\cdots$ という値になります.