’13 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

方程式 $3x^2+y^2=3$ で定まる楕円 E と, 方程式 $xy=\dfrac{3}{4}$ で定まる双曲線 H を考える.

(1) 楕円 E と双曲線 H の交点をすべて求めよ.

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} 3x^2+y^2 \leqq 3 \\ xy \geqq \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ.

'13 後期　理系 ❹

方程式 $3x^2+y^2=3$ で定まる楕円 E と, 方程式 $xy=\dfrac{3}{4}$ で定まる双曲線 H を考える.

(1) 楕円 E と双曲線 H の交点をすべて求めよ.

(2) 連立不等式
$$\begin{cases} 3x^2+y^2 \leqq 3 \\ xy \geqq \dfrac{3}{4} \end{cases}$$
の表す領域の面積を求めよ.

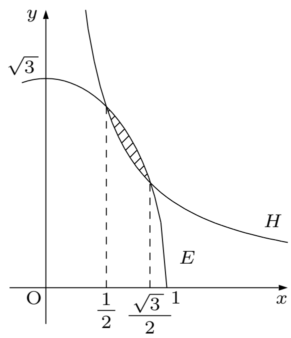
(1) 交点の座標は

$$\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \cdots ① \\ xy=\dfrac{3}{4} \cdots ② \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+\left(\dfrac{3}{4x}\right)^2=3 \\ y=\dfrac{3}{4x} \quad (x=0\ \text{は②を満たさないので} \Longrightarrow \text{も成り立つ}) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 16x^4-16x^2+3=0 \\ y=\dfrac{3}{4x} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (4x^2-1)(4x^2-3)=0 \\ y=\dfrac{3}{4x} \end{cases}$$
$$\iff (x,\,y)=\boxed{\left(\pm\frac{1}{2},\,\pm\frac{3}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ (\text{複号同順})}$$

(2) $\begin{cases} 3x^2+y^2 \leqq 3 \\ xy \geqq \dfrac{3}{4} \end{cases}$ の表す領域を D とすると, D は原点対称になる.

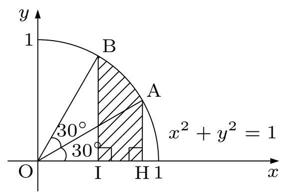
D の面積を S とすると,

$y>0$ において ① $\iff y=\sqrt{3(1-x^2)}$ なので, 右図より



$$S=2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3(1-x^2)}-\frac{3}{4x}\right)dx$$
$$=2\sqrt{3}\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx}_{T\text{ とおく}}-\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x}$$

ここで, T は右図斜線部の面積に相当するので,



$T=$ (扇形 OAB の面積) $+\triangle\mathrm{OHA}-\triangle\mathrm{OIB}=\dfrac{\pi}{12}$

よって $S=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{3}{2}\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{6}-\dfrac{3\log 3}{4}}$