’13 後期　理系 ❸　　　　　　　提出　　　年　　月　　日 名前

相異なる 3 点 A, B, C の上を動く点 P がある. 点 P の 1 秒後の位置が以下のルールに従って定まるものとする.

(i)　A にいるときは, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で A にとどまるか, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で B に移るか, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で C に移る.

(ii)　B にいるときは, 必ず C に移る.

(iii)　C にいるときは, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で A に移るか, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で B に移る.

いま, 点 P が A からスタートしてこのルールに従って n 秒後に A, B, C にいる確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n$ とする.

(1) $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n を $a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1}$ を用いて表せ.

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n$ を求めよ.

'13 後期　理系　**❸**

相異なる 3 点 A, B, C の上を動く点 P がある. 点 P の 1 秒後の位置が以下のルールに従って定まるものとする.

(i)　A にいるときは, 確率$\dfrac{1}{3}$で A にとどまるか, 確率$\dfrac{1}{3}$で B に移るか, 確率$\dfrac{1}{3}$で C に移る.

(ii)　B にいるときは, 必ず C に移る.

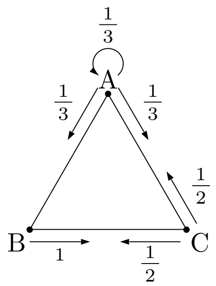
(iii)　C にいるときは, 確率$\dfrac{1}{2}$で A に移るか, 確率$\dfrac{1}{2}$で B に移る.

いま, 点 P が A からスタートしてこのルールに従って n 秒後に A, B, C にいる確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n$ とする.

(1) $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n を $a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1}$ を用いて表せ.

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n$ を求めよ.



(1) 右図より $a_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$, $b_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$, $c_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$$a_2 = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\mathrm{A\to A\to A}} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{A\to C\to A}} = \boxed{\frac{5}{18}},\ b_2 = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\mathrm{A\to A\to B}} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\mathrm{A\to C\to B}} = \boxed{\frac{5}{18}},$$

$$c_2 = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\mathrm{A\to A\to C}} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot 1}_{\mathrm{A\to B\to C}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

(2) (1) の図より $\boxed{a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}c_{n-1}\quad (n \geqq 2)}\cdots$①

(3) (2) と同様に $b_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}c_{n-1}\quad (n \geqq 2)$ ②, $c_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + b_{n-1}\quad (n \geqq 2)$ ③

また, すべての n に対し, P は A, B, C のうちの 1 点にあるので, $a_n + b_n + c_n = 1\quad (n \geqq 1)$ ④

① − ② より $a_n - b_n = 0 \Longleftrightarrow b_n = a_n\quad (n \geqq 2)$ であり, (1) より $b_1 = a_1$ なので, $b_n = a_n\quad (n \geqq 1)$ ⑤

よって ④, ⑤ より $2a_n + c_n = 1 \Longleftrightarrow c_n = -2a_n + 1\quad (n \geqq 1)$ ⑥

⑥より $c_{n-1} = -2a_{n-1} + 1\quad (n \geqq 2)$ なので, これを①に代入することにより,

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}(-2a_{n-1} + 1) \Longleftrightarrow a_n = -\frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow a_n - \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}\left(a_{n-1} - \frac{3}{10}\right)\quad (n \geqq 2)$$

よって数列 $\left\{a_n - \dfrac{3}{10}\right\}$ は公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列となるので,

$$a_n - \frac{3}{10} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{3}{10}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{30}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}\quad (n \geqq 1).$$

よって $\boxed{a_n = -\dfrac{1}{20}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{3}{10}\quad (n \geqq 1)}$ であり,

⑤より $\boxed{b_n = -\dfrac{1}{20}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{3}{10}\quad (n \geqq 1)}$, ⑥より $\boxed{c_n = \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{2}{5}\quad (n \geqq 1)}$