'13 後期　理系 ❷

提出　　　　年　　　月　　　日　名前

2×2 行列 A と B が $AB = BA$ をみたすとき, A と B は交換可能であるという.

(1) A と B が交換可能ならば, AB と B は交換可能であることを示せ.

(2) 行列 $X,\ C,\ E$ を

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める. ただし, $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする. X と C が交換可能のとき, X は実数 $\alpha,\ \beta$ を用いて $\alpha C + \beta E$ と表されることを示せ.

(3) 上の行列 C に対して, 次の 3 条件を同時にみたす 2×2 行列 Y をすべて求めよ.

(a) Y と C は交換可能.

(b) $CY = tY$ をみたす実数 t がある.

(c) Y の $(2\,, 2)$ 成分は 1 である.

'13 後期 理系 ❷

2×2 行列 A と B が $AB=BA$ をみたすとき, A と B は交換可能であるという.

(1) A と B が交換可能ならば, AB と B は交換可能であることを示せ.

(2) 行列 $X,\ C,\ E$ を $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と定める. ただし, $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする. X と C が交換可能のとき, X は実数 $\alpha,\ \beta$ を用いて $\alpha C+\beta E$ と表されることを示せ.

(3) 上の行列 C に対して, 次の 3 条件を同時にみたす 2×2 行列 Y をすべて求めよ.

(a) Y と C は交換可能.　(b) $CY=tY$ をみたす実数 t がある.　(c) Y の $(2,2)$ 成分は 1 である.

(1) A と B は可換なので $(AB)B=(BA)B=B(AB)$ より AB と B は可換であることが示された.

(2) $$XC=CX \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+3b & 2a \\ c+3d & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 3b=2c \\ 2a=b+2d \\ c+3d=3a \end{cases} \iff \begin{cases} b=2(a-d) \\ c=3(a-d) \end{cases}$$
よって $X=\begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ 3(a-d) & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-d & 2(a-d) \\ 3(a-d) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}=(a-d)C+dE.$

$a-d,\ d\in\mathbb{R}$ より, 「$XC=CX \Longrightarrow \exists\alpha,\beta\,(\in\mathbb{R}),\ X=\alpha C+\beta E$」が示された.

(3) (a) より $Y=\alpha C+\beta E\quad(\alpha,\ \beta\in\mathbb{R})$ と表せ, C の $(2,2)$ 成分が 0 なので, (c) より $\beta=1$. よって $Y=\alpha C+E\cdots$①

よって (b) より, $CY=tY \iff C(\alpha C+E)=t(\alpha C+E)$ (①より)
$$\iff \alpha(C+6E)+C=t\alpha C+tE \ \text{(ケーリー・ハミルトンの定理より)}$$
$$\iff (1+\alpha-t\alpha)C=(t-6\alpha)E$$
$$\iff 1+\alpha-t\alpha=0\wedge t-6\alpha=0 \ \text{(}C\text{ は }E\text{ の実数倍ではないので)}$$
$$\iff 6\alpha^2-\alpha-1=0\wedge t=6\alpha \iff (\alpha,\,t)=\left(\frac{1}{2},\,3\right),\ \left(-\frac{1}{3},\,-2\right)$$

以上より $Y=\dfrac{1}{2}C+E,\ -\dfrac{1}{3}C+E \iff \boxed{Y=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$

【別解】

C の固有方程式を解くと, $\lambda^2-\lambda-6=0 \iff (\lambda-3)(\lambda+2)=0 \iff \lambda=3,\ -2$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases} \text{なので, } \begin{cases} \overrightarrow{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases} \text{とおくと } \begin{cases} C\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{u} \\ C\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{v} \end{cases} \cdots ①$$

(b) より $(C-tE)Y=0$ であり, $(C-tE)^{-1}$ が存在すると $Y=0$ となり (c) に反するので,

$(C-tE)^{-1}$ は存在しない $\iff \det(C-tE)=0 \iff t=3,\ -2$ (C の固有方程式と同じ方程式)

また, $CY=tY \iff \begin{cases} CY\overrightarrow{u}=tY\overrightarrow{u} \\ CY\overrightarrow{v}=tY\overrightarrow{v} \end{cases}$ ($\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}$ は 1 次独立なので)
$$\iff \begin{cases} YC\overrightarrow{u}=tY\overrightarrow{u} \\ YC\overrightarrow{v}=tY\overrightarrow{v} \end{cases} \ \text{((a)より)}$$
$$\iff \begin{cases} 3Y\overrightarrow{u}=tY\overrightarrow{u}\cdots ② \\ -2Y\overrightarrow{v}=tY\overrightarrow{v}\cdots ③ \end{cases} \ \text{(①より)}$$

(i) $t=3$ のとき ②$\wedge$③ $\iff Y\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0} \iff Y=\begin{pmatrix} 3p & 2p \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ($p\in\mathbb{R}$) と表せる. ((c)より)

(a) と (2) より $\begin{pmatrix} 3p & 2p \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表せるので $\alpha=\dfrac{1}{2},\ \beta=1,\ p=\dfrac{1}{2}$

(ii) $t=-2$ のとき ②$\wedge$③ $\iff Y\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \iff Y=\begin{pmatrix} q & -q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ($q\in\mathbb{R}$) と表せる. ((c)より)

(a) と (2) より $\begin{pmatrix} q & -q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表せるので $\alpha=-\dfrac{1}{3},\ \beta=1,\ q=\dfrac{2}{3}$

(i),(ii) より $\boxed{Y=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$