'13 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

a, b, c を正の実数とする.

(1) $t > 0$ に対して, 不等式 $bt^{b+c} + c \geqq (b+c)t^b$ が成り立つことを示せ.

(2) $x > 0,\ y > 0$ に対して, 不等式 $ax^{a+b+c} + by^{a+b+c} + c \geqq (a+b+c)x^a y^b$ が成り立つことを示せ.

'13 後期　理系 ❶

$a,\ b,\ c$ を正の実数とする.

(1) $t>0$ に対して, 不等式 $bt^{b+c}+c \geqq (b+c)t^b$ が成り立つことを示せ.

(2) $x>0,\ y>0$ に対して, 不等式 $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c \geqq (a+b+c)x^a y^b$ が成り立つことを示せ.

(1) $f(t)=bt^{b+c}+c-(b+c)t^b$ とおくと,
$f'(t)=b(b+c)t^{b+c-1}-b(b+c)t^{b-1}=b(b+c)t^{b-1}(t^c-1)$.
$b,\ c>0$ より $t>0$ における右の増減表を得る.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	＼	$-$	0	$+$
$f(t)$	(c)	↘	0	↗

よって $t>0$ に対し, $f(t)\geqq 0 \iff bt^{b+c}+c \geqq (b+c)t^b$ が示された.

One Point

増減表では斜線で表したが, 安易に $f'(0)=0$ としないように気をつけましょう.
$b=1$ のときは $f'(0)\neq 0$ であり, $0<b<1$ のときは $f'(0)$ は定義されません.

(2) $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c-(a+b+c)x^a y^b$ の y を $y=k\ (>0)$ で固定したものを x の関数 $g(x)$ とおくと,
$g(x)=ax^{a+b+c}+bk^{a+b+c}+c-(a+b+c)k^b x^a$.

$$\begin{aligned}g'(x)&=a(a+b+c)x^{a+b+c-1}-a(a+b+c)k^b x^{a-1}\\&=a(a+b+c)x^{a-1}(x^{b+c}-k^b)\end{aligned}$$

$a,\ b,\ c>0$ より $x>0$ における右の増減表を得る.

x	0	$\cdots$	$k^{\frac{b}{b+c}}$	$\cdots$
$g'(x)$	＼	$-$	0	$+$
$g(x)$	(c)	↘		↗

$$\begin{aligned}g(k^{\frac{b}{b+c}})&=ak^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}+bk^{a+b+c}+c-(a+b+c)k^b k^{\frac{ab}{b+c}}\\&=ak^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}+bk^{a+b+c}+c-(a+b+c)k^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}\\&=bk^{a+b+c}+c-(b+c)k^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}\\&=b(k^{\frac{a+b+c}{b+c}})^{b+c}+c-(b+c)(k^{\frac{a+b+c}{b+c}})^b\\&=bt^{b+c}+c-(b+c)t^b\quad (k^{\frac{a+b+c}{b+c}}=t \text{ とおいた})\\&=f(t)\end{aligned}$$

k を $k>0$ の範囲で動かすと t は $t>0$ の範囲を動くので, (1) より $k>0$ に対し, $g(k^{\frac{b}{b+c}})\geqq 0$.
よって $x,\ y>0$ に対し, $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c \geqq (a+b+c)x^a y^b$ が示された.

【別解】

(1) より $\underline{b,\ c,\ t>0 \text{ に対し}, bt^{b+c}+c\geqq (b+c)t^b}_{①}$ なので, $\underline{a,\ b,\ t>0 \text{ に対し}, at^{a+b}+b\geqq (a+b)t^a}_{①'}$
$X,\ Y>0$ のとき $\dfrac{X}{Y}>0$ なので, ①$'$ において t に $\dfrac{X}{Y}$ を代入することができ,
$a,\ b,\ X,\ Y>0$ に対し,

$$\begin{aligned}&a\left(\frac{X}{Y}\right)^{a+b}+b\geqq (a+b)\left(\frac{X}{Y}\right)^a\\ \iff& aX^{a+b}+bY^{a+b}\geqq (a+b)X^aY^b\\ \iff& a(X^{\frac{a+b}{a+b+c}})^{a+b+c}+b(Y^{\frac{a+b}{a+b+c}})^{a+b+c}\geqq (a+b)X^aY^b\\ \iff& ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq (a+b)(x^{\frac{a+b+c}{a+b}})^a(y^{\frac{a+b+c}{a+b}})^b+c\quad (X^{\frac{a+b}{a+b+c}}=x,\ Y^{\frac{a+b}{a+b+c}}=y \text{ とおいた})\\ \iff& ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq \underline{(a+b)(x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}})^{a+b+c}+c}_{②}\end{aligned}$$

ここで, $a,\ b>0$ のとき $a+b>0$ なので, ①において b に $a+b$ を代入することができ,
$a,\ b,\ c,\ t>0$ に対し, $(a+b)t^{a+b+c}+c\geqq (a+b+c)t^{a+b}$.
また, $X,\ Y>0$ より $x,\ y>0$ であり, $x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}}>0$ なので,
② $\geqq (a+b+c)(x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}})^{a+b}=(a+b+c)x^ay^b$
以上より $a,\ b,\ c,\ x,\ y>0$ に対し, $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq (a+b+c)x^ay^b$ が示された.