’13 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

$a,\ b,\ c$ を正の実数とする.

(1) $t>0$ に対して, 不等式 $bt^{b+c}+c \geqq (b+c)t^b$ が成り立つことを示せ.

(2) $x>0,\ y>0$ に対して, 不等式 $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c \geqq (a+b+c)x^a y^b$ が成り立つことを示せ.

’13 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

2×2 行列 A と B が $AB=BA$ をみたすとき, A と B は交換可能であるという.

(1) A と B が交換可能ならば, AB と B は交換可能であることを示せ.

(2) 行列 $X,\ C,\ E$ を

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める. ただし, $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする. X と C が交換可能のとき, X は実数 $\alpha,\ \beta$ を用いて $\alpha C+\beta E$ と表されることを示せ.

(3) 上の行列 C に対して, 次の 3 条件を同時にみたす 2×2 行列 Y をすべて求めよ.

(a) Y と C は交換可能.

(b) $CY=tY$ をみたす実数 t がある.

(c) Y の $(2\,,\,2)$ 成分は 1 である.

'13 後期 理系 ❸

提出　　年　　月　　日 名前

相異なる 3 点 A, B, C の上を動く点 P がある. 点 P の 1 秒後の位置が以下のルールに従って定まるものとする.

(i) A にいるときは, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で A にとどまるか, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で B に移るか, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で C に移る.

(ii) B にいるときは, 必ず C に移る.

(iii) C にいるときは, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で A に移るか, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で B に移る.

いま, 点 P が A からスタートしてこのルールに従って n 秒後に A, B, C にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする.

(1) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n を a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} を用いて表せ.

(3) a_n, b_n, c_n を求めよ.

'13 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

方程式 $3x^2+y^2=3$ で定まる楕円 E と, 方程式 $xy=\dfrac{3}{4}$ で定まる双曲線 H を考える.

(1) 楕円 E と双曲線 H の交点をすべて求めよ.

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} 3x^2+y^2 \leqq 3 \\ xy \geqq \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ.

’13 後期　理系　❶

$a,\ b,\ c$ を正の実数とする.

(1) $t>0$ に対して, 不等式 $bt^{b+c}+c \geqq (b+c)t^b$ が成り立つことを示せ.

(2) $x>0,\ y>0$ に対して, 不等式 $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c \geqq (a+b+c)x^ay^b$ が成り立つことを示せ.

(1) $f(t)=bt^{b+c}+c-(b+c)t^b$ とおくと,
$f'(t)=b(b+c)t^{b+c-1}-b(b+c)t^{b-1}=b(b+c)t^{b-1}(t^c-1).$
$b,\ c>0$ より $t>0$ における右の増減表を得る.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(c)	↘	0	↗

よって $t>0$ に対し, $f(t)\geqq 0 \iff bt^{b+c}+c\geqq (b+c)t^b$ が示された.

One Point

増減表では斜線で表したが, 安易に $f'(0)=0$ としないように気をつけましょう.
$b=1$ のときは $f'(0)\neq 0$ であり, $0<b<1$ のときは $f'(0)$ は定義されません.

(2) $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c-(a+b+c)x^ay^b$ の y を $y=k\ (>0)$ で固定したものを x の関数 $g(x)$ とおくと,
$g(x)=ax^{a+b+c}+bk^{a+b+c}+c-(a+b+c)k^bx^a.$

$$\begin{aligned} g'(x)&=a(a+b+c)x^{a+b+c-1}-a(a+b+c)k^bx^{a-1}\\ &=a(a+b+c)x^{a-1}(x^{b+c}-k^b)\end{aligned}$$

$a,\ b,\ c>0$ より $x>0$ における右の増減表を得る.

x	0	$\cdots$	$k^{\frac{b}{b+c}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	(c)	↘		↗

$$\begin{aligned} g(k^{\frac{b}{b+c}})&=ak^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}+bk^{a+b+c}+c-(a+b+c)k^bk^{\frac{ab}{b+c}}\\ &=ak^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}+bk^{a+b+c}+c-(a+b+c)k^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}\\ &=bk^{a+b+c}+c-(b+c)k^{\frac{b(a+b+c)}{b+c}}\\ &=b(k^{\frac{a+b+c}{b+c}})^{b+c}+c-(b+c)(k^{\frac{a+b+c}{b+c}})^b\\ &=bt^{b+c}+c-(b+c)t^b\quad (k^{\frac{a+b+c}{b+c}}=t \text{ とおいた})\\ &=f(t)\end{aligned}$$

k を $k>0$ の範囲で動かすと t は $t>0$ の範囲を動くので, (1) より $k>0$ に対し, $g(k^{\frac{b}{b+c}})\geqq 0.$
よって $x,\ y>0$ に対し, $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq (a+b+c)x^ay^b$ が示された.

【別解】

(1) より $\underline{b,\ c,\ t>0 \text{ に対し}, bt^{b+c}+c\geqq (b+c)t^b}_{①}$ なので, $\underline{a,\ b,\ t>0 \text{ に対し}, at^{a+b}+b\geqq (a+b)t^a}_{①'}$

$X,\ Y>0$ のとき $\dfrac{X}{Y}>0$ なので, ①′ において t に $\dfrac{X}{Y}$ を代入することができ,
$a,\ b,\ X,\ Y>0$ に対し,

$$a\left(\frac{X}{Y}\right)^{a+b}+b\geqq (a+b)\left(\frac{X}{Y}\right)^a$$

$$\begin{aligned} &\iff aX^{a+b}+bY^{a+b}\geqq (a+b)X^aY^b\\ &\iff a(X^{\frac{a+b}{a+b+c}})^{a+b+c}+b(Y^{\frac{a+b}{a+b+c}})^{a+b+c}\geqq (a+b)X^aY^b\\ &\iff ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq (a+b)(x^{\frac{a+b+c}{a+b}})^a(y^{\frac{a+b+c}{a+b}})^b+c\quad (X^{\frac{a+b}{a+b+c}}=x,\ Y^{\frac{a+b}{a+b+c}}=y \text{ とおいた})\\ &\iff ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq \underline{(a+b)(x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}})^{a+b+c}+c}_{②}\end{aligned}$$

ここで, $a,\ b>0$ のとき $a+b>0$ なので, ①において b に $a+b$ を代入することができ,
$a,\ b,\ c,\ t>0$ に対し, $(a+b)t^{a+b+c}+c\geqq (a+b+c)t^{a+b}.$
また, $X,\ Y>0$ より $x,\ y>0$ であり, $x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}}>0$ なので,
② $\geqq (a+b+c)(x^{\frac{a}{a+b}}y^{\frac{b}{a+b}})^{a+b}=(a+b+c)x^ay^b$
以上より $a,\ b,\ c,\ x,\ y>0$ に対し, $ax^{a+b+c}+by^{a+b+c}+c\geqq (a+b+c)x^ay^b$ が示された.

'13 後期 理系 ❷

2×2 行列 A と B が $AB=BA$ をみたすとき, A と B は交換可能であるという.

(1) A と B が交換可能ならば, AB と B は交換可能であることを示せ.

(2) 行列 $X,\ C,\ E$ を $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と定める. ただし, $a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする. X と C が交換可能のとき, X は実数 $\alpha,\ \beta$ を用いて $\alpha C+\beta E$ と表されることを示せ.

(3) 上の行列 C に対して, 次の 3 条件を同時にみたす 2×2 行列 Y をすべて求めよ.

(a) Y と C は交換可能. (b) $CY=tY$ をみたす実数 t がある. (c) Y の $(2,2)$ 成分は 1 である.

(1) A と B は可換なので $(AB)B=(BA)B=B(AB)$ より AB と B は可換であることが示された.

(2)
$$XC=CX \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+3b & 2a \\ c+3d & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 3b=2c \\ 2a=b+2d \\ c+3d=3a \end{cases} \iff \begin{cases} b=2(a-d) \\ c=3(a-d) \end{cases}$$

よって $X=\begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ 3(a-d) & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-d & 2(a-d) \\ 3(a-d) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}=(a-d)C+dE.$

$a-d,\ d\in\mathbb{R}$ より, 「$XC=CX \Longrightarrow \exists\alpha,\beta\,(\in\mathbb{R}),\ X=\alpha C+\beta E$」が示された.

(3) (a) より $Y=\alpha C+\beta E\ \ (\alpha,\ \beta\in\mathbb{R})$ と表せ, C の $(2,2)$ 成分が 0 なので, (c) より $\beta=1$. よって $Y=\alpha C+E\cdots$①

よって (b) より,
$$\begin{aligned}
CY=tY &\iff C(\alpha C+E)=t(\alpha C+E)\quad (\text{①より}) \\
&\iff \alpha(C+6E)+C=t\alpha C+tE\quad (\text{ケーリー・ハミルトンの定理より}) \\
&\iff (1+\alpha-t\alpha)C=(t-6\alpha)E \\
&\iff 1+\alpha-t\alpha=0\wedge t-6\alpha=0\quad (C\text{ は }E\text{ の実数倍ではないので}) \\
&\iff 6\alpha^2-\alpha-1=0\wedge t=6\alpha \iff (\alpha,\,t)=\left(\frac{1}{2},\,3\right),\ \left(-\frac{1}{3},\,-2\right)
\end{aligned}$$

以上より $Y=\dfrac{1}{2}C+E,\ -\dfrac{1}{3}C+E \iff \boxed{Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$

【別解】

C の固有方程式を解くと, $\lambda^2-\lambda-6=0 \iff (\lambda-3)(\lambda+2)=0 \iff \lambda=3,\ -2$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases} \text{なので, } \begin{cases} \vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases} \text{とおくと } \begin{cases} C\vec{u}=3\vec{u} \\ C\vec{v}=-2\vec{v} \end{cases} \cdots①$$

(b) より $(C-tE)Y=0$ であり, $(C-tE)^{-1}$ が存在すると $Y=0$ となり (c) に反するので,

$(C-tE)^{-1}$ は存在しない $\iff \det(C-tE)=0 \iff t=3,\ -2$ (C の固有方程式と同じ方程式)

$$\text{また, } CY=tY \iff \begin{cases} CY\vec{u}=tY\vec{u} \\ CY\vec{v}=tY\vec{v} \end{cases}\quad (\vec{u},\ \vec{v}\text{ は 1 次独立なので})$$
$$\iff \begin{cases} YC\vec{u}=tY\vec{u} \\ YC\vec{v}=tY\vec{v} \end{cases}\quad ((\text{a})\text{より})$$
$$\iff \begin{cases} 3Y\vec{u}=tY\vec{u}\cdots② \\ -2Y\vec{v}=tY\vec{v}\cdots③ \end{cases}\quad (\text{①より})$$

(i) $t=3$ のとき ②$\wedge$③ $\iff Y\vec{v}=\vec{0} \iff Y=\begin{pmatrix} 3p & 2p \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $(p\in\mathbb{R})$ と表せる. ((c)より)

(a) と (2) より $\begin{pmatrix} 3p & 2p \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表せるので $\alpha=\dfrac{1}{2},\ \beta=1,\ p=\dfrac{1}{2}$

(ii) $t=-2$ のとき ②$\wedge$③ $\iff Y\vec{u}=\vec{0} \iff Y=\begin{pmatrix} q & -q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $(q\in\mathbb{R})$ と表せる. ((c)より)

(a) と (2) より $\begin{pmatrix} q & -q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表せるので $\alpha=-\dfrac{1}{3},\ \beta=1,\ q=\dfrac{2}{3}$

(i),(ii) より $\boxed{Y=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

'13 後期　理系　❸

相異なる 3 点 A, B, C の上を動く点 P がある. 点 P の 1 秒後の位置が以下のルールに従って定まるものとする.

(i)　A にいるときは, 確率$\dfrac{1}{3}$で A にとどまるか, 確率$\dfrac{1}{3}$で B に移るか, 確率$\dfrac{1}{3}$で C に移る.

(ii)　B にいるときは, 必ず C に移る.

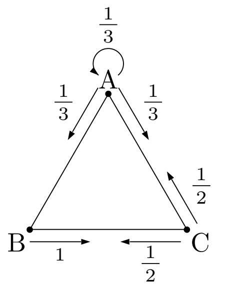
(iii)　C にいるときは, 確率$\dfrac{1}{2}$で A に移るか, 確率$\dfrac{1}{2}$で B に移る.

いま, 点 P が A からスタートしてこのルールに従って n 秒後に A, B, C にいる確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n$ とする.

(1) $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$ を求めよ.

(2) $n \geqq 2$ のとき, a_n を $a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1}$ を用いて表せ.

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n$ を求めよ.



(1) 右図より $a_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}},\ b_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}},\ c_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$a_2 = \underbrace{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}}_{\mathrm{A\to A\to A}} + \underbrace{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}}_{\mathrm{A\to C\to A}} = \boxed{\dfrac{5}{18}},\ b_2 = \underbrace{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}}_{\mathrm{A\to A\to B}} + \underbrace{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}}_{\mathrm{A\to C\to B}} = \boxed{\dfrac{5}{18}},$

$c_2 = \underbrace{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}}_{\mathrm{A\to A\to C}} + \underbrace{\dfrac{1}{3}\cdot 1}_{\mathrm{A\to B\to C}} = \boxed{\dfrac{4}{9}}$

(2) (1) の図より $\boxed{a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}c_{n-1}\quad (n \geqq 2)}\cdots$①

(3) (2) と同様に $\underline{b_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}c_{n-1}\quad (n \geqq 2)}$② , $\underline{c_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + b_{n-1}\quad (n \geqq 2)}$③

また, すべての n に対し, P は A, B, C のうちの 1 点にあるので, $\underline{a_n + b_n + c_n = 1\quad (n \geqq 1)}$④

① − ② より $a_n - b_n = 0 \iff b_n = a_n\quad (n \geqq 2)$ であり, (1) より $b_1 = a_1$ なので, $\underline{b_n = a_n\quad (n \geqq 1)}$⑤

よって ④, ⑤ より $2a_n + c_n = 1 \iff \underline{c_n = -2a_n + 1\quad (n \geqq 1)}$⑥

⑥より $c_{n-1} = -2a_{n-1} + 1\quad (n \geqq 2)$ なので, これを①に代入することにより,

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}(-2a_{n-1} + 1) \iff a_n = -\frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$\iff a_n - \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}\left(a_{n-1} - \frac{3}{10}\right)\quad (n \geqq 2)$$

よって数列 $\left\{a_n - \dfrac{3}{10}\right\}$ は公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列となるので,

$$a_n - \frac{3}{10} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{3}{10}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{30}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{20}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}\quad (n \geqq 1).$$

よって $\boxed{a_n = -\dfrac{1}{20}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{3}{10}\quad (n \geqq 1)}$ であり,

⑤より $\boxed{b_n = -\dfrac{1}{20}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{3}{10}\quad (n \geqq 1)}$, ⑥より $\boxed{c_n = \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{2}{5}\quad (n \geqq 1)}$

'13 後期　理系　❹

方程式 $3x^2+y^2=3$ で定まる楕円 E と, 方程式 $xy=\dfrac{3}{4}$ で定まる双曲線 H を考える.

(1) 楕円 E と双曲線 H の交点をすべて求めよ.

(2) 連立不等式

$$\begin{cases} 3x^2+y^2 \leqq 3 \\ xy \geqq \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ.

(1) 交点の座標は

$$\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \cdots ① \\ xy=\dfrac{3}{4} \cdots ② \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+\left(\dfrac{3}{4x}\right)^2=3 \\ y=\dfrac{3}{4x} \quad (x=0 \text{ は②を満たさないので} \Longrightarrow \text{ も成り立つ}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 16x^4-16x^2+3=0 \\ y=\dfrac{3}{4x} \end{cases}$$

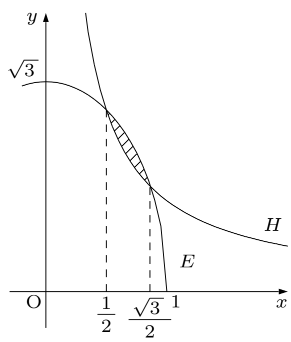
$$\iff \begin{cases} (4x^2-1)(4x^2-3)=0 \\ y=\dfrac{3}{4x} \end{cases}$$

$$\iff (x,\, y)=\boxed{\left(\pm\frac{1}{2},\, \pm\frac{3}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ (\text{複号同順})}$$

(2) $\begin{cases} 3x^2+y^2 \leqq 3 \\ xy \geqq \dfrac{3}{4} \end{cases}$ の表す領域を D とすると, D は原点対称になる.

D の面積を S とすると,

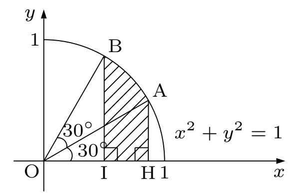
$y>0$ において ① $\iff y=\sqrt{3(1-x^2)}$ なので, 右図より



$$S=2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3(1-x^2)}-\frac{3}{4x}\right)dx$$

$$=2\sqrt{3}\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx}_{T\text{ とおく}}-\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x}$$

ここで, T は右図斜線部の面積に相当するので,



$T=$ (扇形 OAB の面積) $+\triangle\mathrm{OHA}-\triangle\mathrm{OIB}=\dfrac{\pi}{12}$

よって $S=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{3}{2}\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{6}-\dfrac{3\log 3}{4}}$