'12 後期　理系 ❸　　　　　　　　提出　　　年　　月　　日　名前

実数 $a > 0$ について, $I(a) = \int_1^e |\log ax|dx$ とする. ただし, $e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底とする.

(1) $I(a)$ を a を用いて表せ.

(2) $I(a)$ の最小値, およびそのときの a の値を求めよ.

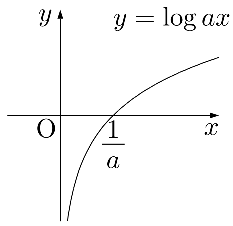
’12 後期 理系 ❸

実数 $a>0$ について, $I(a)=\displaystyle\int_1^e|\log ax|dx$ とする. ただし, $e=2.7182\cdots$ は自然対数の底とする.

(1) $I(a)$ を a を用いて表せ.

(2) $I(a)$ の最小値, およびそのときの a の値を求めよ.

(1) $y=\log ax$ のグラフは $y=\log x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{a}\ (>0)$ 倍に偏倍したものなので右図のようになる.



(i) $\dfrac{1}{a}\leqq 1 \Longleftrightarrow 1\leqq a$ ($a>0$ より) のとき

$$I(a)=\int_1^e(\log x+\log a)dx=\Big[x\log x-x+(\log a)x\Big]_1^e$$
$$=(e-0)-(e-1)+(\log a)(e-1)=(e-1)\log a+1$$

(ii) $1\leqq\dfrac{1}{a}\leqq e\Longleftrightarrow\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$I(a)=\int_1^{\frac{1}{a}}(-\log x-\log a)dx+\int_{\frac{1}{a}}^e(\log x+\log a)dx$$
$$=\Big[-x\log x+x-(\log a)x\Big]_1^{\frac{1}{a}}+\Big[x\log x-x+(\log a)x\Big]_{\frac{1}{a}}^e$$
$$=-\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}-0\right)+\left(\frac{1}{a}-1\right)-(\log a)\left(\frac{1}{a}-1\right)+\left(e-\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}\right)-\left(e-\frac{1}{a}\right)+(\log a)\left(e-\frac{1}{a}\right)$$
$$=(e+1)\log a+\frac{2}{a}-1$$

(iii) $e\leqq\dfrac{1}{a}\Longleftrightarrow 0<a\leqq\dfrac{1}{e}$ ($a>0$ より) のとき

$$I(a)=\int_1^e(-\log x-\log a)dx=-(e-1)\log a-1$$

以上より
$$\boxed{I(a)=\begin{cases}(e-1)\log a+1 & (1\leqq a\text{ のとき})\\ (e+1)\log a+\dfrac{2}{a}-1 & \left(\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1\text{ のとき}\right)\\ -(e-1)\log a-1 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{e}\text{のとき}\right)\end{cases}}$$

(2) $e-1>0$ より $I(a)$ は $1\leqq a$ のとき単調増加, $0<a\leqq\dfrac{1}{e}$ のとき単調減少.

$\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1$ のとき, $I'(a)=\dfrac{e+1}{a}-\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{(e+1)a-2}{a^2}$ であり,

$\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e+e}<\dfrac{2}{e+1}<\dfrac{2}{1+1}=1$ より右の増減表を得る.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{2}{e+1}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$I'(a)$				$-$	0	$+$		
$I(a)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$$I\left(\frac{2}{e+1}\right)=(e+1)\log\frac{2}{e+1}+(e+1)-1$$
$$=e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}$$

よって $\boxed{\text{最小値 } e-(e+1)\log\dfrac{e+1}{2}\quad\left(a=\dfrac{2}{e+1}\text{のとき}\right)}$