’12 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

xy 平面上に 2 点 A$(1, 0)$, B$(-1, 0)$ をとる. A, B と異なる点 P(x, y) は, $\angle$APB が 45° または 135° となるように動くものとする.

(1) $t = x^2 - 1$ とおく. x と y の満たす条件を t と y の式で表せ.

(2) 点 P の軌跡を図示せよ.

(3) 点 Q$(4, 4)$ を考える. 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

'12 後期　理系 ❷

xy 平面上に 2 点 A$(1\,,\,0)$, B$(-1\,,\,0)$ をとる. A, B と異なる点 P$(x\,,\,y)$ は, $\angle$APB が 45° または 135° となるように動くものとする.

(1) $t=x^2-1$ とおく. x と y の満たす条件を t と y の式で表せ.

(2) 点 P の軌跡を図示せよ.

(3) 点 Q$(4\,,\,4)$ を考える. 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

(1) P は A, B と異なるので $(x,\,y)\neq(\pm1,\,0)\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}x-1\\ y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}x+1\\ y\end{pmatrix}$ なので, ① のもとで,

$$\angle\mathrm{APB}=45^\circ,\ 135^\circ \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\cos45^\circ,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\cos135^\circ \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$$

$$\iff 2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}})^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2$$

$$\iff 2\{(x^2-1)+y^2\}^2=\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\}$$

$$\iff 2(t+y^2)^2=(x^2+y^2+1)^2-(2x)^2$$

$$\iff 2(t+y^2)^2=(t+y^2+2)^2-4(t+1)\quad (t=x^2-1 \text{ より})$$

$$\iff 2(t+y^2)^2=(t+y^2)^2+4(t+y^2)+4-4(t+1)$$

$$\iff (t+y^2)^2-4y^2=0 \iff (t+y^2+2y)(t+y^2-2y)=0 \iff t+y^2\pm2y=0$$

また, ① $\iff (t,\,y)\neq(0,\,0)$ なので, 求める条件は $\boxed{(t,\,y)\neq(0,\,0)\land t+y^2\pm2y=0}\cdots$②

【別解】

$\alpha=1,\ \beta=-1,\ z=x+yi$ とすると, 複素数平面において A(α), B(β), P(z) となる.

P は A, B と異なるので $(x,\,y)\neq(\pm1,\,0)\cdots$①

$\angle\mathrm{APB}=45^\circ,\ 135^\circ \iff \underbrace{\arg\left(\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}\right)=\pm45^\circ,\ \pm135^\circ}_{③}$　$(z-\alpha\neq0$ より$)$ であり,

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha}=\frac{x+1+yi}{x-1+yi}=\frac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{(x-1+yi)(x-1-yi)}=\frac{x^2-(1+yi)^2}{(x-1)^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2-1)-2yi}{(x-1)^2+y^2}$$ なので,

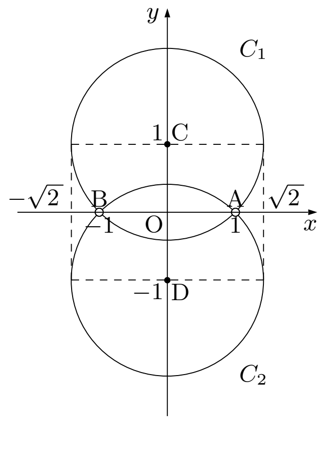
$$③ \iff \begin{pmatrix}x^2+y^2-1\\ -2y\end{pmatrix}\mathbin{/\!/}\begin{pmatrix}\cos45^\circ\\ \sin45^\circ\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos135^\circ\\ \sin135^\circ\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x^2+y^2-1\\ -2y\end{pmatrix}\mathbin{/\!/}\begin{pmatrix}\pm1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\iff x^2+y^2-1\pm2y=0 \iff t+y^2\pm2y=0$$

また, ① $\iff (t,\,y)\neq(0,\,0)$ なので, 求める条件は $\boxed{(t,\,y)\neq(0,\,0)\land t+y^2\pm2y=0}$

(2) ② $\iff$ ① $\land\, x^2+y^2\pm2y-1=0 \iff$ ① $\land\, x^2+(y\pm1)^2=2$

よって右図実線部.



【別解】角が一定のまま動く点の軌跡と言えば円周角定理の利用

C$(0\,,\,1)$ とすると, $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ なので, P が x 軸の上側で $\angle\mathrm{APB}=45^\circ=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ACB}$ を満たして動くときと, x 軸の下側で $\angle\mathrm{APB}=135^\circ=180^\circ-45^\circ$ を満たして動くときの P の軌跡は, C を中心とする半径 AC $=\sqrt{2}$ の円周 C_1 上のうち, A, B を除いたものになる.

同様に, D$(0\,,\,-1)$ とすると, P が x 軸の下側で $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$, x 軸の上側で $\angle\mathrm{APB}=135^\circ$ を満たして動くときの P の軌跡は, D を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周 C_2 上のうち, A, B を除いたものになる.

以上より, P の軌跡は右図実線部.

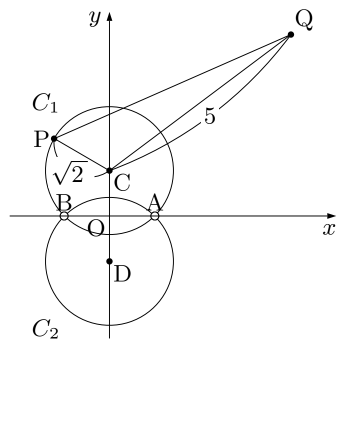
(3)　(i) P が円 C_1 上を動くとき,

任意の点 P に対し, 三角不等式より $\mathrm{PQ}\geqq|\,\mathrm{CQ}-\mathrm{CP}\,|=5-\sqrt{2}$

等号が成り立つのは P が線分 QC 上にあるときであり,

その P は A, B 以外なので $\mathrm{PQ}=5-\sqrt{2}$ を満たす P は存在する.

よって PQ の最小値は $5-\sqrt{2}$



(ii) P が円 C_2 上を動くとき,

任意の点 P に対し, 三角不等式より $\mathrm{PQ}\geqq|\,\mathrm{DQ}-\mathrm{DP}\,|=\sqrt{41}-\sqrt{2}$ であり,

これは $5-\sqrt{2}$ より大きい.

(i), (ii) より PQ の最小値は $\boxed{5-\sqrt{2}}$