’12 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

n を 3 以上の整数とする. 1 から $3n$ までの番号が書かれた $3n$ 枚のカードを A さん, B さん, C さんの 3 人に n 枚ずつ配る.

(1) カードの配り方は何通りあるか.

(2) A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ で, B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ である配り方は何通りあるか.

’12 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

xy 平面上に 2 点 A$(1\,,\,0)$, B$(-1\,,\,0)$ をとる. A, B と異なる点 P$(x\,,\,y)$ は, $\angle$APB が 45° または 135° となるように動くものとする.

(1) $t = x^2 - 1$ とおく. x と y の満たす条件を t と y の式で表せ.

(2) 点 P の軌跡を図示せよ.

(3) 点 Q$(4\,,\,4)$ を考える. 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

’12 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日　名前

実数 $a > 0$ について, $I(a) = \displaystyle\int_1^e |\log ax|dx$ とする. ただし, $e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底とする.

(1) $I(a)$ を a を用いて表せ.

(2) $I(a)$ の最小値, およびそのときの a の値を求めよ.

’12 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日　名前

次の問に答えよ.

(1) $x \leqq 0$ のとき, $1 + x \leqq e^x \leqq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ であることを示せ.

(2) n を自然数とする. 正の数 a が $a^{10^n} = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき, 不等式

$$e^{-0.70\times 10^{-n}} < a < e^{-0.69\times 10^{-n}}$$

を示せ. 必要ならば, 2 の自然対数 $\log 2$ が $0.69 < \log 2 < 0.70$ を満たすことを用いてもよい.

(3) (2) で与えた a について, 不等式

$$0.\underbrace{9\cdots9}_{n\,個}3 < a < 0.\underbrace{9\cdots9}_{n\,個}4$$

を示せ. ここで, $0.\underbrace{9\cdots9}_{n\,個}3$ は, 小数点以下に 9 が n 個続き, その次に 3 が現れる小数である.

'12 後期　理系 ❶

n を 3 以上の整数とする. 1 から $3n$ までの番号が書かれた $3n$ 枚のカードを A さん, B さん, C さんの 3 人に n 枚ずつ配る.

(1) カードの配り方は何通りあるか.

(2) A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ で, B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ である配り方は何通りあるか.

(1) $\underbrace{{}_{3n}\mathrm{C}_n}_{\text{A への配り方}} \cdot \underbrace{{}_{2n}\mathrm{C}_n}_{\text{B への配り方}} = \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{n!n!} = \boxed{\dfrac{(3n)!}{(n!)^3} \text{ 通り}}$

(2) $(2n-1)-(n+1) = n-2 > 0$ ($n \geqq 3$ より) なので, カードの並びと枚数は以下のようになる.

$$\underbrace{1,\ 2,\ \cdots,\ n}_{n\text{ 枚}},\ \underline{n+1},\ \underbrace{n+2,\ n+3,\ \cdots,\ 2n-2,\ \underline{2n-1},\ \underbrace{2n,\ 2n+1,\ \cdots,\ 3n}_{n+1\text{ 枚}}}_{2n-1\text{ 枚}}$$

求めるのは,

B に $2n,\ 2n+1,\ \cdots,\ 3n$ の $n+1$ 枚から $n-1$ 枚配り,

A に $n+2,\ n+3,\ \cdots,\ 3n$ の $2n-1$ 枚のうち B に配った n 枚を除いた $n-1$ 枚から $n-1$ 枚配る場合の数なので,

${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \boxed{\dfrac{(n+1)n}{2} \text{ 通り}}$

'12 後期　理系 ❷

xy 平面上に 2 点 A$(1\,,\,0)$, B$(-1\,,\,0)$ をとる. A, B と異なる点 P$(x\,,\,y)$ は, $\angle$APB が 45° または 135° となるように動くものとする.

(1) $t=x^2-1$ とおく. x と y の満たす条件を t と y の式で表せ.

(2) 点 P の軌跡を図示せよ.

(3) 点 Q$(4\,,\,4)$ を考える. 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

(1) P は A, B と異なるので $(x,\,y)\neq(\pm1,\,0)\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}x+1\\y\end{pmatrix}$ なので, ① のもとで,

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{APB}=45^\circ,\ 135^\circ &\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\cos45^\circ,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\cos135^\circ \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\pm\frac{1}{\sqrt2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\\ &\iff 2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}})^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2\\ &\iff 2\{(x^2-1)+y^2\}^2=\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\}\\ &\iff 2(t+y^2)^2=(x^2+y^2+1)^2-(2x)^2\\ &\iff 2(t+y^2)^2=(t+y^2+2)^2-4(t+1)\quad (t=x^2-1\text{ より})\\ &\iff 2(t+y^2)^2=(t+y^2)^2+4(t+y^2)+4-4(t+1)\\ &\iff (t+y^2)^2-4y^2=0\iff(t+y^2+2y)(t+y^2-2y)=0\iff t+y^2\pm2y=0\end{aligned}$$

また, ① $\iff(t,\,y)\neq(0,\,0)$ なので, 求める条件は $\boxed{(t,\,y)\neq(0,\,0)\wedge t+y^2\pm2y=0}\cdots$②

【別解】

$\alpha=1,\ \beta=-1,\ z=x+yi$ とすると, 複素数平面において A(α), B(β), P(z) となる.

P は A, B と異なるので $(x,\,y)\neq(\pm1,\,0)\cdots$①

$\angle\mathrm{APB}=45^\circ,\ 135^\circ\iff\underbrace{\arg\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right)=\pm45^\circ,\ \pm135^\circ}_{③}$　$(z-\alpha\neq0$ より$)$ であり,

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha}=\frac{x+1+yi}{x-1+yi}=\frac{(x+1+yi)(x-1-yi)}{(x-1+yi)(x-1-yi)}=\frac{x^2-(1+yi)^2}{(x-1)^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2-1)-2yi}{(x-1)^2+y^2}\text{ なので,}$$

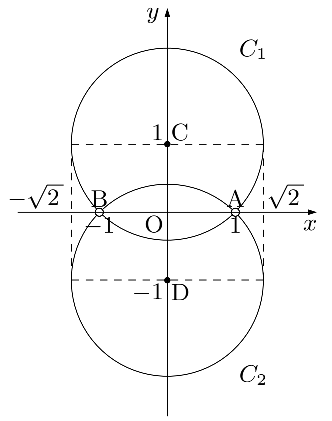
$$③\iff\begin{pmatrix}x^2+y^2-1\\-2y\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}\cos45^\circ\\\sin45^\circ\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos135^\circ\\\sin135^\circ\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x^2+y^2-1\\-2y\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}\pm1\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff x^2+y^2-1\pm2y=0\iff t+y^2\pm2y=0$$

また, ① $\iff(t,\,y)\neq(0,\,0)$ なので, 求める条件は $\boxed{(t,\,y)\neq(0,\,0)\wedge t+y^2\pm2y=0}$

(2) ② $\iff$ ① $\wedge\ x^2+y^2\pm2y-1=0\iff$ ① $\wedge\ x^2+(y\pm1)^2=2$

よって右図実線部.



【別解】角が一定のまま動く点の軌跡と言えば円周角定理の利用

C$(0\,,\,1)$ とすると, $\angle$ACB $=90^\circ$ なので, P が x 軸の上側で $\angle\mathrm{APB}=45^\circ=\dfrac12\angle\mathrm{ACB}$ を満たして動くときと, x 軸の下側で $\angle\mathrm{APB}=135^\circ=180^\circ-45^\circ$ を満たして動くときの P の軌跡は, C を中心とする半径 AC $=\sqrt2$ の円周 C_1 上のうち, A, B を除いたものになる.

同様に, D$(0\,,\,-1)$ とすると, P が x 軸の下側で $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$, x 軸の上側で $\angle\mathrm{APB}=135^\circ$ を満たして動くときの P の軌跡は, D を中心とする半径 $\sqrt2$ の円周 C_2 上のうち, A, B を除いたものになる.

以上より, P の軌跡は右図実線部.

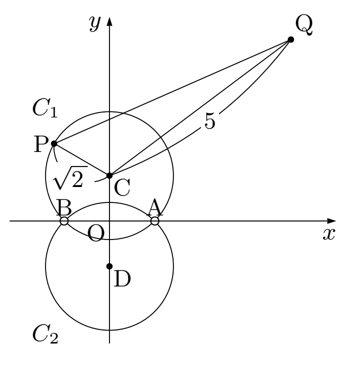
(3)　(i) P が円 C_1 上を動くとき,

任意の点 P に対し, 三角不等式より PQ $\geqq|\mathrm{CQ}-\mathrm{CP}|=5-\sqrt2$

等号が成り立つのは P が線分 QC 上にあるときであり,

その P は A, B 以外なので PQ $=5-\sqrt2$ を満たす P は存在する.

よって PQ の最小値は $5-\sqrt2$



(ii) P が円 C_2 上を動くとき,

任意の点 P に対し, 三角不等式より PQ $\geqq|\mathrm{DQ}-\mathrm{DP}|=\sqrt{41}-\sqrt2$ であり,

これは $5-\sqrt2$ より大きい.

(i), (ii) より PQ の最小値は $\boxed{5-\sqrt2}$

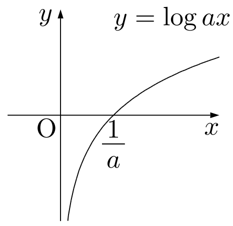
’12 後期　理系 ❸

実数 $a>0$ について, $I(a)=\displaystyle\int_1^e |\log ax|dx$ とする. ただし, $e=2.7182\cdots$ は自然対数の底とする.

(1) $I(a)$ を a を用いて表せ.

(2) $I(a)$ の最小値, およびそのときの a の値を求めよ.

(1) $y=\log ax$ のグラフは $y=\log x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ (>0) 倍に偏倍したものなので右図のようになる.



(i) $\dfrac{1}{a}\leqq 1 \Longleftrightarrow 1\leqq a$ ($a>0$ より) のとき

$$I(a)=\int_1^e(\log x+\log a)dx=\Big[x\log x-x+(\log a)x\Big]_1^e$$
$$=(e-0)-(e-1)+(\log a)(e-1)=(e-1)\log a+1$$

(ii) $1\leqq\dfrac{1}{a}\leqq e \Longleftrightarrow \dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$I(a)=\int_1^{\frac{1}{a}}(-\log x-\log a)dx+\int_{\frac{1}{a}}^e(\log x+\log a)dx$$
$$=\Big[-x\log x+x-(\log a)x\Big]_1^{\frac{1}{a}}+\Big[x\log x-x+(\log a)x\Big]_{\frac{1}{a}}^e$$
$$=-\left(\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}-0\right)+\left(\frac{1}{a}-1\right)-(\log a)\left(\frac{1}{a}-1\right)+\left(e-\frac{1}{a}\log\frac{1}{a}\right)-\left(e-\frac{1}{a}\right)+(\log a)\left(e-\frac{1}{a}\right)$$
$$=(e+1)\log a+\frac{2}{a}-1$$

(iii) $e\leqq\dfrac{1}{a}\Longleftrightarrow 0<a\leqq\dfrac{1}{e}$ ($a>0$ より) のとき

$$I(a)=\int_1^e(-\log x-\log a)dx=-(e-1)\log a-1$$

以上より $\boxed{I(a)=\begin{cases}(e-1)\log a+1 & (1\leqq a\text{ のとき})\\ (e+1)\log a+\dfrac{2}{a}-1 & \left(\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1\text{ のとき}\right)\\ -(e-1)\log a-1 & \left(0<a\leqq\dfrac{1}{e}\text{のとき}\right)\end{cases}}$

(2) $e-1>0$ より $I(a)$ は $1\leqq a$ のとき単調増加, $0<a\leqq\dfrac{1}{e}$ のとき単調減少.

$\dfrac{1}{e}\leqq a\leqq 1$ のとき, $I'(a)=\dfrac{e+1}{a}-\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{(e+1)a-2}{a^2}$ であり,

$\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e+e}<\dfrac{2}{e+1}<\dfrac{2}{1+1}=1$ より右の増減表を得る.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{2}{e+1}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$I'(a)$				$-$	0	$+$		
$I(a)$		↘		↘		↗		↗

$$I\left(\frac{2}{e+1}\right)=(e+1)\log\frac{2}{e+1}+(e+1)-1$$
$$=e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}$$

よって $\boxed{\text{最小値 } e-(e+1)\log\dfrac{e+1}{2}\quad\left(a=\dfrac{2}{e+1}\text{のとき}\right)}$

'12 後期 理系 ❹

次の問に答えよ.

(1) $x \leqq 0$ のとき, $1+x \leqq e^x \leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ であることを示せ.

(2) n を自然数とする. 正の数 a が $a^{10^n}=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき, 不等式

$$e^{-0.70\times10^{-n}} < a < e^{-0.69\times10^{-n}}$$

を示せ. 必要ならば, 2 の自然対数 $\log 2$ が $0.69<\log 2<0.70$ を満たすことを用いてもよい.

(3) (2) で与えた a について, 不等式

$$0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}3 < a < 0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}4$$

を示せ. ここで, $0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}3$ は, 小数点以下に 9 が n 個続き, その次に 3 が現れる小数である.

(1) $f(x)=e^x-(x+1)$ とおくと,

$$\begin{cases} x\leqq0 \text{ のとき } f'(x)=e^x-1\leqq0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$ より, $x\leqq0$ のとき $f(x)\geqq0 \iff \underline{x+1\leqq e}$ ①

$g(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)-e^x$ とおくと,

$$\begin{cases} x\leqq0 \text{ のとき } g'(x)=1+x-e^x=-f(x)\leqq0 \quad (\text{①より}) \\ g(0)=0 \end{cases}$$ より, $x\leqq0$ のとき $g(x)\geqq0 \iff \underline{e^x\leqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}}$ ②

①, ② より $x\leqq0$ のとき, $1+x\leqq e^x\leqq1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が示された.

(2)
$$\begin{aligned}
0.69<\log2<0.70 &\iff e^{0.69}<2<e^{0.70} \quad (Y=e^X \text{は単調増加なので}) \\
&\iff e^{-0.70}<\frac{1}{2}<e^{-0.69} \quad (e^{0.69},\ e^{0.70}>0 \text{ なので}) \\
&\iff e^{-0.70}<a^{10^n}<e^{-0.69} \\
&\iff e^{-0.70\times10^{-n}}<a<e^{-0.69\times10^{-n}} \quad (X>0 \text{ において } Y=X^{10^{-n}} \text{は単調増加なので})
\end{aligned}$$

(3) $-0.70\times10^{-n}\leqq0$ なので (1) より

$$e^{-0.70\times10^{-n}} \geqq 1-0.70\times10^{-n}=0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}3\cdots③$$

$-0.69\times10^{-n}\leqq0$ なので (1) より

$$\begin{aligned}
e^{-0.69\times10^{-n}} &\leqq 1-0.69\times10^{-n}+\frac{(-0.69\times10^{-n})^2}{2} \\
&=1-0.69\times10^{-n}+\frac{0.69^2\times10^{-n}}{2}\times10^{-n} \\
&<1-0.69\times10^{-n}+\frac{1^2\times10^{-1}}{2}\times10^{-n} \quad (n\in\mathbb{N} \text{ より}) \\
&=1-0.69\times10^{-n}+0.05\times10^{-n} \\
&<1-0.69\times10^{-n}+0.09\times10^{-n} \\
&=1-0.60\times10^{-n} \\
&=0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}4\cdots④
\end{aligned}$$

(2) の結果および ③, ④ より $0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}3<a<0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{ 個}}4$ が示された.