'11 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

p を自然数とする. 数列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right), \quad x_{n+1} = 2(x_n)^2 - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める.

(1) x_n を求めよ.

(2) l を自然数とする. $p = 2^l$ および $p = 3 \times 2^l$ のそれぞれの場合について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ.

(3) l を自然数とする. $p = 5 \times 2^l$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ は発散することを示せ.

'11 後期 理系 ❹

p を自然数とする. 数列 $\{x_n\}$ を漸化式 $x_1=\cos\left(\dfrac{2\pi}{p}\right)\cdots$①, $x_{n+1}=2(x_n)^2-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots$② で定める.

(1) x_n を求めよ.

(2) l を自然数とする. $p=2^l$ および $p=3\times 2^l$ のそれぞれの場合について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ.

(3) l を自然数とする. $p=5\times 2^l$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ は発散することを示せ.

(1) 観察

$x_2=2\cos^2\dfrac{2\pi}{p}-1=\cos\dfrac{2^2\pi}{p}$, $x_3=2\cos^2\dfrac{2^2\pi}{p}-1=\cos\dfrac{2^3\pi}{p}$, $\cdots$, $x_n=\cos\dfrac{2^n\pi}{p}$ と予想できる.

$\forall n(\in\mathbb{N})$, $\underline{x_n=\cos\dfrac{2^n\pi}{p}}_{P(n)}$ が成り立つことを示す.

(i) $(P(1)\text{ 左辺})=x_1=\cos\dfrac{2\pi}{p}$ (①より), $(P(1)\text{ 右辺})=\cos\dfrac{2\pi}{p}$ より $P(1)$ は成り立つ.

(ii) $k\,(\in\mathbb{N})$ に対し, $P(k)$ を仮定して $P(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned}(P(k+1)\text{ 左辺})=x_{k+1}&=2(x_k)^2-1\quad(\text{②より})\\&=2\cos^2\frac{2^k\pi}{p}-1\quad(\text{仮定 }P(k)\text{ より})\\&=\cos\frac{2^{k+1}\pi}{p}=(P(k+1)\text{ 右辺})\end{aligned}$$

よって $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$ は成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により, $\forall n\,(\in\mathbb{N}), P(n)$ が示された.

(2) 思考

$\{x_n\}$ が収束する場合, その極限値を α とおくと②より $\alpha=2\alpha^2-1\Longleftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2},\ 1$ なので,

$x_n=-\dfrac{1}{2},\ 1$ となる n を見つけてしまえば収束することが示せる.

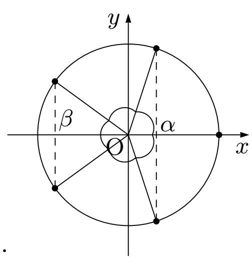
(i) $p=2^l$ $(l\in\mathbb{N})$ のとき, $x_n=\cos 2^{n-l}\pi$ なので, $x_{l+1}=\cos 2\pi=1$ となる.

②より $x_{l+2}=2\cdot 1^2-1=1$ なので, 帰納的に以降の n に対し $x_n=1$ となる. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{1}$

(ii) $p=3\times 2^l$ $(l\in\mathbb{N})$ のとき, $x_n=\cos\dfrac{2^{n-l}\pi}{3}$ なので, $x_{l+1}=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ となる.

②より $x_{l+2}=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-1=-\dfrac{1}{2}$ なので, 帰納的に以降の n に対し $x_n=-\dfrac{1}{2}$ となる. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

(3) $p=5\times 2^l$ $(l\in\mathbb{N})$ のとき, $x_n=\cos\dfrac{2^{n-l}\pi}{5}$ なので,



$x_{l+1}=\cos\dfrac{2\pi}{5}(=\alpha$とおく$)$, $x_{l+2}=\cos\dfrac{4\pi}{5}(=\beta$とおく$)$, $x_{l+3}=\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\alpha$

となる.

これは②において, $x_n=\alpha$ のとき $x_{n+1}=\beta$, $x_n=\beta$ のとき $x_{n+1}=\alpha$

となることを意味しており, $\alpha\neq\beta$ なので,

帰納的に以降の n に対し x_n は異なる 2 つの値 $\alpha,\ \beta$ を繰り返す. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ は発散する.