’11 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

k を実数とし, $x \geqq 0$ に対して $f(x) = xe^{-x},\ g(x) = kx$ と定める. ただし, $e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底である.

(1) $0 < x \leqq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在するための k の範囲を求めよ.

(2) k が (1) の範囲にあるとき, (1) で定まる x を a とする. 積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ の値を k を用いて表せ.

(3) k が (1) の範囲にあるとき, 積分 $\displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ の値が最小となる k を求めよ.

'11 後期　理系 ❸

k を実数とし, $x \geqq 0$ に対して $f(x) = xe^{-x}$, $g(x) = kx$ と定める. ただし, $e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底である.

(1) $0 < x \leqq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在するための k の範囲を求めよ.

(2) k が (1) の範囲にあるとき, (1) で定まる x を a とする. 積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ の値を k を用いて表せ.

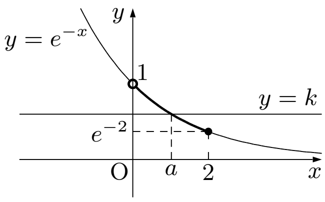
(3) k が (1) の範囲にあるとき, 積分 $\displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ の値が最小となる k を求めよ.

(1) $x > 0$ において, $f(x) = g(x) \iff xe^{-x} = kx \iff e^{-x} = k$　($x \neq 0$ より)
なので

　$0 < x \leqq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在する

$\iff 0 < x \leqq 2$ の範囲に $y = e^{-x}$ と $y = k$ のグラフの交点がただ 1 つ存在する

$\iff \boxed{e^{-2} \leqq k < 1}$



(2) (1) より $e^{-a} = k \iff a = -\log k$ なので,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \Big[-(x+1)e^{-x} \Big]_0^a = -(a+1)e^{-a} + 1 = \boxed{(\log k - 1)k + 1}$$

$$\begin{array}{rrl} & \{-xe^{-x}\}' = & xe^{-x} - e^{-x} \\ +) & \{-e^{-x}\}' = & \qquad\quad e^{-x} \\ \hline & \{-(x+1)e^{-x}\}' = & xe^{-x} \end{array}$$

(3) (1) のグラフより

$0 \leqq x \leqq a$ のとき $e^{-x} \geqq k \iff f(x) \geqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

$a \leqq x \leqq 2$ のとき $e^{-x} \leqq k \iff f(x) \leqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

よって $h(k) = \displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} h(k) &= \int_0^a (xe^{-x} - kx)\,dx + \int_a^2 (-xe^{-x} + kx)\,dx \\ &= \Big[-(x+1)e^{-x} - \frac{kx^2}{2} \Big]_0^a + \Big[(x+1)e^{-x} + \frac{kx^2}{2} \Big]_a^2 \\ &= -(a+1)e^{-a} + 1 - \frac{ka^2}{2} + 3e^{-2} - (a+1)e^{-a} + 2k - \frac{ka^2}{2} \\ &= 2(\log k - 1)k - k(\log k)^2 + 1 + 3e^{-2} + 2k \\ &= -k(\log k)^2 + 2k\log k + 1 + 3e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(k) &= -(\log k)^2 - 2k(\log k)\frac{1}{k} + 2\log k + 2k \cdot \frac{1}{k} \\ &= -(\log k)^2 + 2 \\ &= -(\log k + \sqrt{2}\,)(\log k - \sqrt{2}\,) \end{aligned}$$

よって右の増減表を得るので $h(k)$ が最小となる k の値は $\boxed{k = e^{-\sqrt{2}}}$

k	e^{-2}	$\cdots$	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$h'(k)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$h(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

【別解】最小値を与える k の値だけ求めたいので積分を計算する必要は無い

(1) のグラフより

$0 \leqq x \leqq a$ のとき $e^{-x} \geqq k \iff f(x) \geqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

$a \leqq x \leqq 2$ のとき $e^{-x} \leqq k \iff f(x) \leqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

よって $H(a) = \displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} H(a) &= \int_0^a (xe^{-x} - kx)\,dx + \int_a^2 (-xe^{-x} + kx)\,dx \\ &= \int_0^a xe^{-x}dx - e^{-a}\int_0^a x\,dx + \int_2^a xe^{-x}dx - e^{-a}\int_2^a x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(a) &= ae^{-a} + e^{-a}\int_0^a x\,dx - ae^{-a} + ae^{-a} + e^{-a}\int_2^a x\,dx - ae^{-a} \\ &= e^{-a}\Big[\frac{x^2}{2} \Big]_0^a + e^{-a}\Big[\frac{x^2}{2} \Big]_2^a \\ &= (a^2 - 2)e^{-a} \\ &= (a + \sqrt{2}\,)(a - \sqrt{2}\,)e^{-a} \end{aligned}$$

よって右の増減表を得るので $H(a)$ が最小となる k の値は

$a = \sqrt{2} \iff \boxed{k = e^{-\sqrt{2}}}$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$H'(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$H(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	