## ’11 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日　名前

$a$ を実数とする. $xyz$ 空間内の 4 点を $\mathrm{A}(0\,,\,a\,,\,4)$, $\mathrm{B}(-2\,,\,0\,,\,3)$, $\mathrm{C}(1\,,\,0\,,\,2)$, $\mathrm{D}(0\,,\,2\,,\,3)$ とし, 点 $\mathrm{P}(1\,,\,0\,,\,6)$ に光源をおく.

(1) 光源が $xy$ 平面上につくる点 A の影の座標を求めよ. また, $a$ が実数全体にわたって変化するとき, その影がつくる直線の方程式を求めよ.

(2) 光源が $xy$ 平面上につくる三角形 BCD の影は三角形となる. この三角形の頂点の座標を求めよ.

(3) $a < 5$ とする. 光源が $xy$ 平面上につくる四面体 ABCD の影を考える. この影が三角形となるような $a$ の範囲を求めよ.

**'11 後期**　理系 ❷

$a$ を実数とする. $xyz$ 空間内の 4 点を $\mathrm{A}(0\,,\,a\,,\,4)$, $\mathrm{B}(-2\,,\,0\,,\,3)$, $\mathrm{C}(1\,,\,0\,,\,2)$, $\mathrm{D}(0\,,\,2\,,\,3)$ とし, 点 $\mathrm{P}(1\,,\,0\,,\,6)$ に光源をおく.

(1) 光源が $xy$ 平面上につくる点 A の影の座標を求めよ. また, $a$ が実数全体にわたって変化するとき, その影がつくる直線の方程式を求めよ.

(2) 光源が $xy$ 平面上につくる三角形 BCD の影は三角形となる. この三角形の頂点の座標を求めよ.

(3) $a<5$ とする. 光源が $xy$ 平面上につくる四面体 ABCD の影を考える. この影が三角形となるような $a$ の範囲を求めよ.

A, B, C, D の影を A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}1\\-a\\2\end{pmatrix}$ より直線 AP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-a\\2\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0\iff t=-3$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3a\\0\end{pmatrix}$ となるので $\boxed{\mathrm{A}'(-2\,,\,3a\,,\,0)}$

$a$ が全実数範囲を動くときの A$'$ の軌跡の方程式は $\boxed{x=-2\wedge z=0}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ より直線 BP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0\iff t=-6$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{B}'(-5\,,\,0\,,\,0)$

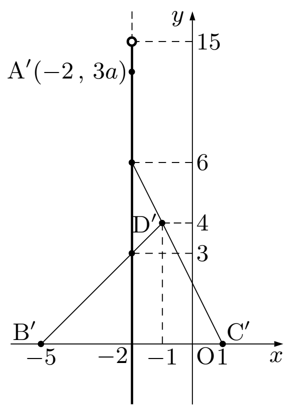
$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ より直線 CP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0\iff t=-6$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{C}'(1\,,\,0\,,\,0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ より直線 DP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0\iff t=-2$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{D}'(-1\,,\,4\,,\,0)$

以上より求める座標は $\boxed{\mathrm{B}'(-5\,,\,0\,,\,0),\ \mathrm{C}'(1\,,\,0\,,\,0),\ \mathrm{D}'(-1\,,\,4\,,\,0)}$




(3) 四面体 ABCD の影はこの四面体の 4 面の三角形が作る影を合わせたものである.

$a<5$ より A$'$ は右図太線部上を動くので, この影が三角形となるような $a$ の範囲は

$0\leqq 3a\leqq 3,\ 6\leqq 3a<15\iff\boxed{0\leqq a\leqq 1,\ 2\leqq a<5}$.