’11 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

$0 \leqq \theta < \pi$ に対して, 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし, 点 P の f による像を $f(\mathrm{P})$ で表す.

(1) 点 $\mathrm{Q}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}, \sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{Q})$ の座標を求めよ.

(2) 点 $\mathrm{R}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}, -\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{R})$ の座標を求めよ.

(3) f は直線 $y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動であることを示せ.

'11 後期　理系 ❶

$0 \leqq \theta < \pi$ に対して, 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし, 点 P の f による像を $f(\mathrm{P})$ で表す.

(1) 点 $\mathrm{Q}\left(\cos\frac{\theta}{2},\, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{Q})$ の座標を求めよ.　　(2) 点 $\mathrm{R}\left(\sin\frac{\theta}{2},\, -\cos\frac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{R})$ の座標を求めよ.

(3) f は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動であることを示せ.

$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = S_\theta \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ より $\boxed{f(\mathrm{Q})\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\,,\, \sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{R})} = S_\theta \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ より $\boxed{f(\mathrm{R})\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\,,\, \cos\dfrac{\theta}{2}\right)}$

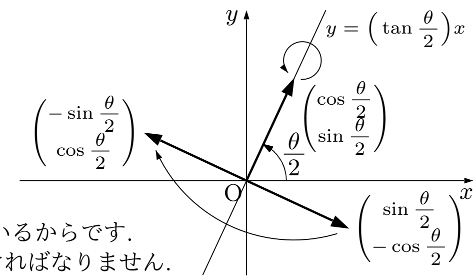
(3) One Point

直線 $l : y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動を g とする.

$g\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ であり,

$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ は 1 次独立なので, (1), (2) より f が g である.

というのは不完全な解答です. なぜならこれは g を 1 次変換と決めつけているからです.
f によって xy 平面上の全ての点が l に関して対称移動することを示さなければなりません.



【方針】基底の変更

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{e_2}$ とおき, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ を基底とする XY 座標平面を考える.

直線 $l : y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ は X 軸であり, $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ よりこれは直交座標系なので

$(X\,,\,Y)$ を l に関して対称移動した点は $(X\,,\,-Y)$ である.

一方, $f\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = f\left(X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}\right)$

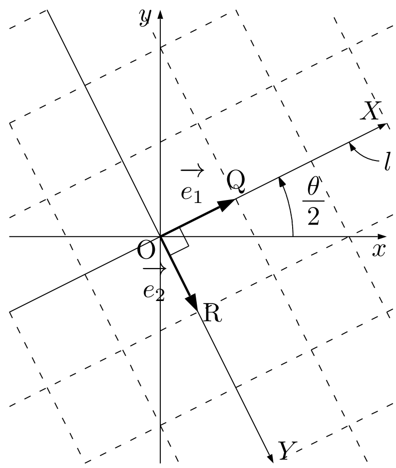
$= Xf(\overrightarrow{e_1}) + Y(\overrightarrow{e_2})$ (f の線形性より)

$= X\overrightarrow{e_1} - Y\overrightarrow{e_2}$ ((1), (2) より)

$= \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}$

よって f は点 $(X\,,\,Y)$ を点 $(X\,,\,-Y)$ にうつすので,

f は l に関する対称移動であることが示された.



【別解】(1), (2) を一切利用せずに

$\tan\dfrac{\theta}{2} = k$ とおくと, $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2k}{1+k^2} \\ \cos\theta = \dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2} \end{cases}$ より, $S_\theta = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & -(1-k^2) \end{pmatrix}$ となる.

$\mathrm{A}(x\,,\,y)$ に対し, A と $f(\mathrm{A})$ が直線 $l : y = kx$ に関して対称であることを示せばよい.

$\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} = \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{A})} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = S_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} (1-k^2)x + 2ky \\ 2kx - (1-k^2)y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} -2k^2x + 2ky \\ 2kx - 2y \end{pmatrix}$

$= \dfrac{2(kx-y)}{1+k^2}\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}$ であり,

l は $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ を方向ベクトルに持つので, $\underline{l \perp \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})}\ \ (\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} = \overrightarrow{0}\text{ も含む})}$① が成り立つ.

次に 2 点 A, $f(\mathrm{A})$ の中点を M とすると,

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} (1-k^2)x + 2ky \\ 2kx - (1-k^2)y \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{2(1+k^2)}\begin{pmatrix} 2x + 2ky \\ 2kx + 2k^2y \end{pmatrix} = \dfrac{x+ky}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$

よって $\underline{\text{M は } l \text{ 上にある}}$②

①, ②より A と $f(\mathrm{A})$ は l に関して対称なので, f は l に関する対称移動であることが示された.