’11 後期　理系 ❶　　　提出　　年　　月　　日 名前

$0 \leqq \theta < \pi$ に対して, 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし, 点 P の f による像を $f(\mathrm{P})$ で表す.

(1) 点 $\mathrm{Q}\left(\cos\dfrac{\theta}{2},\ \sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{Q})$ の座標を求めよ.

(2) 点 $\mathrm{R}\left(\sin\dfrac{\theta}{2},\ -\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{R})$ の座標を求めよ.

(3) f は直線 $y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動であることを示せ.

’11 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

a を実数とする. xyz 空間内の 4 点を $\mathrm{A}(0\,,\,a\,,\,4)$, $\mathrm{B}(-2\,,\,0\,,\,3)$, $\mathrm{C}(1\,,\,0\,,\,2)$, $\mathrm{D}(0\,,\,2\,,\,3)$ とし, 点 $\mathrm{P}(1\,,\,0\,,\,6)$ に光源をおく.

(1) 光源が xy 平面上につくる点 A の影の座標を求めよ. また, a が実数全体にわたって変化するとき, その影がつくる直線の方程式を求めよ.

(2) 光源が xy 平面上につくる三角形 BCD の影は三角形となる. この三角形の頂点の座標を求めよ.

(3) $a < 5$ とする. 光源が xy 平面上につくる四面体 ABCD の影を考える. この影が三角形となるような a の範囲を求めよ.

’11 後期　理系 ❸　　　　提出　　　年　　月　　日 名前

k を実数とし, $x \geqq 0$ に対して $f(x) = xe^{-x}$, $g(x) = kx$ と定める. ただし, $e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底である.

(1) $0 < x \leqq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在するための k の範囲を求めよ.

(2) k が (1) の範囲にあるとき, (1) で定まる x を a とする. 積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ の値を k を用いて表せ.

(3) k が (1) の範囲にあるとき, 積分 $\displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ の値が最小となる k を求めよ.

’11 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

p を自然数とする. 数列 $\{x_n\}$ を漸化式

$$x_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right),\quad x_{n+1} = 2(x_n)^2 - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める.

(1) x_n を求めよ.

(2) l を自然数とする. $p = 2^l$ および $p = 3 \times 2^l$ のそれぞれの場合について $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ.

(3) l を自然数とする. $p = 5 \times 2^l$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ は発散することを示せ.

'11 後期　理系　❶

$0 \leqq \theta < \pi$ に対して, 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし, 点 P の f による像を $f(\mathrm{P})$ で表す.

(1) 点 $\mathrm{Q}\left(\cos\frac{\theta}{2},\, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{Q})$ の座標を求めよ.　　(2) 点 $\mathrm{R}\left(\sin\frac{\theta}{2},\, -\cos\frac{\theta}{2}\right)$ に対して, $f(\mathrm{R})$ の座標を求めよ.

(3) f は直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動であることを示せ.

$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = S_\theta \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ より $\boxed{f(\mathrm{Q})\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\,,\, \sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{R})} = S_\theta \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ より $\boxed{f(\mathrm{R})\left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\,,\, \cos\dfrac{\theta}{2}\right)}$

(3) One Point

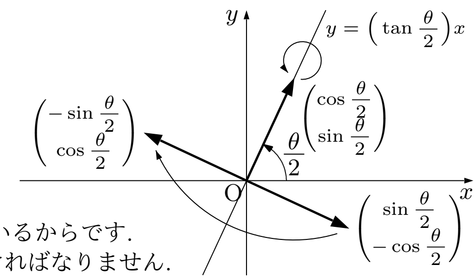
直線 $l : y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動を g とする.

$g\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ であり,

$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ は 1 次独立なので, (1), (2) より f が g である.

というのは不完全な解答です. なぜならこれは g を 1 次変換と決めつけているからです.

f によって xy 平面上の全ての点が l に関して対称移動することを示さなければなりません.



【方針】基底の変更

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{e_2}$ とおき, $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}$ を基底とする XY 座標平面を考える.

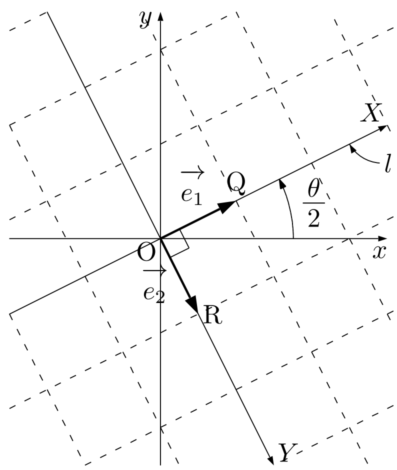
直線 $l : y = \left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)x$ は X 軸であり, $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ よりこれは直交座標系なので

$(X\,,\, Y)$ を l に関して対称移動した点は $(X\,,\, -Y)$ である.

$$\begin{aligned}
\text{一方, } f\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= f\left(X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}\right) \\
&= Xf(\overrightarrow{e_1}) + Y(\overrightarrow{e_2}) \quad (f\text{ の線形性より}) \\
&= X\overrightarrow{e_1} - Y\overrightarrow{e_2} \quad ((1),\ (2)\text{ より}) \\
&= \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって f は点 $(X\,,\, Y)$ を点 $(X\,,\, -Y)$ にうつすので,

f は l に関する対称移動であることが示された.



【別解】(1), (2) を一切利用せずに

$\tan\dfrac{\theta}{2} = k$ とおくと, $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2k}{1+k^2} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2} \end{cases}$ より, $S_\theta = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & -(1-k^2) \end{pmatrix}$ となる.

$\mathrm{A}(x\,,\, y)$ に対し, A と $f(\mathrm{A})$ が直線 $l : y = kx$ に関して対称であることを示せばよい.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} &= \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{A})} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = S_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} (1-k^2)x + 2ky \\ 2kx - (1-k^2)y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} -2k^2x + 2ky \\ 2kx - 2y \end{pmatrix} \\
&= \frac{2(kx-y)}{1+k^2}\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \text{であり,}
\end{aligned}$$

l は $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ を方向ベクトルに持つので, $\underline{l \perp \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})}\ \ (\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} = \overrightarrow{0}\text{ も含む})}_{①}$ が成り立つ.

次に 2 点 A, $f(\mathrm{A})$ の中点を M とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} (1-k^2)x + 2ky \\ 2kx - (1-k^2)y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2(1+k^2)}\begin{pmatrix} 2x + 2ky \\ 2kx + 2k^2y \end{pmatrix} = \frac{x+ky}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$$

よって $\underline{\text{M は } l \text{ 上にある}}_{②}$

①, ②より A と $f(\mathrm{A})$ は l に関して対称なので, f は l に関する対称移動であることが示された.

’11 後期　理系　❷

a を実数とする. xyz 空間内の 4 点を $\mathrm{A}(0\,,\,a\,,\,4)$, $\mathrm{B}(-2\,,\,0\,,\,3)$, $\mathrm{C}(1\,,\,0\,,\,2)$, $\mathrm{D}(0\,,\,2\,,\,3)$ とし, 点 $\mathrm{P}(1\,,\,0\,,\,6)$ に光源をおく.

(1) 光源が xy 平面上につくる点 A の影の座標を求めよ. また, a が実数全体にわたって変化するとき, その影がつくる直線の方程式を求めよ.

(2) 光源が xy 平面上につくる三角形 BCD の影は三角形となる. この三角形の頂点の座標を求めよ.

(3) $a<5$ とする. 光源が xy 平面上につくる四面体 ABCD の影を考える. この影が三角形となるような a の範囲を求めよ.

A, B, C, D の影を A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}1\\-a\\2\end{pmatrix}$ より直線 AP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-a\\2\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0 \Longleftrightarrow t=-3$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3a\\0\end{pmatrix}$ となるので $\boxed{\mathrm{A}'(-2\,,\,3a\,,\,0)}$

a が全実数範囲を動くときの A$'$ の軌跡の方程式は $\boxed{x=-2\wedge z=0}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ より直線 BP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0 \Longleftrightarrow t=-6$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{B}'(-5\,,\,0\,,\,0)$

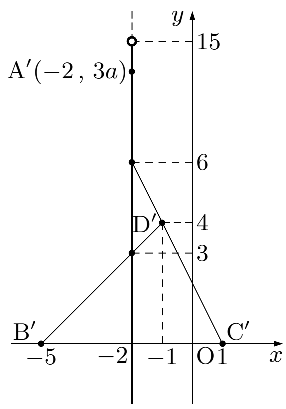
$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ より直線 CP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0 \Longleftrightarrow t=-6$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{C}'(1\,,\,0\,,\,0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ より直線 DP のパラメータ表示は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{R})$ となる.

$z=0 \Longleftrightarrow t=-2$ であり, このとき $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ となるので $\mathrm{D}'(-1\,,\,4\,,\,0)$

以上より求める座標は $\boxed{\mathrm{B}'(-5\,,\,0\,,\,0),\ \mathrm{C}'(1\,,\,0\,,\,0),\ \mathrm{D}'(-1\,,\,4\,,\,0)}$



(3) 四面体 ABCD の影はこの四面体の 4 面の三角形が作る影を合わせたものである.
$a<5$ より A$'$ は右図太線部上を動くので, この影が三角形となるような a の範囲は
$0\leqq 3a\leqq 3,\ 6\leqq 3a<15 \Longleftrightarrow \boxed{0\leqq a\leqq 1,\ 2\leqq a<5}$.

'11 後期　理系 ❸

k を実数とし, $x \geqq 0$ に対して $f(x) = xe^{-x}$, $g(x) = kx$ と定める. ただし, $e = 2.7182\cdots$ は自然対数の底である.

(1) $0 < x \leqq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在するための k の範囲を求めよ.

(2) k が (1) の範囲にあるとき, (1) で定まる x を a とする. 積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ の値を k を用いて表せ.

(3) k が (1) の範囲にあるとき, 積分 $\displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ の値が最小となる k を求めよ.

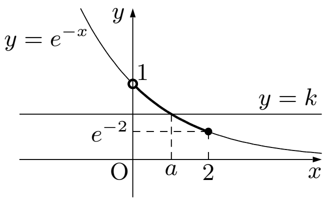
(1) $x > 0$ において, $f(x) = g(x) \Longleftrightarrow xe^{-x} = kx \Longleftrightarrow e^{-x} = k$　($x \neq 0$ より)

なので

　　$0 < x \leqq 2$ の範囲に $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在する

$\Longleftrightarrow$ $0 < x \leqq 2$ の範囲に $y = e^{-x}$ と $y = k$ のグラフの交点がただ 1 つ存在する

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{e^{-2} \leqq k < 1}$



(2) (1) より $e^{-a} = k \Longleftrightarrow a = -\log k$ なので,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \Big[\,-(x+1)e^{-x}\,\Big]_0^a = -(a+1)e^{-a} + 1 = \boxed{(\log k - 1)k + 1}$$

$$\begin{array}{rl} & \{-xe^{-x}\}' = xe^{-x} - e^{-x} \\ +) & \{-e^{-x}\}' = \qquad\quad e^{-x} \\ \hline & \{-(x+1)e^{-x}\}' = xe^{-x} \end{array}$$

(3) (1) のグラフより

$0 \leqq x \leqq a$ のとき $e^{-x} \geqq k \Longleftrightarrow f(x) \geqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

$a \leqq x \leqq 2$ のとき $e^{-x} \leqq k \Longleftrightarrow f(x) \leqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

よって $h(k) = \displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} h(k) &= \int_0^a (xe^{-x} - kx)\,dx + \int_a^2 (-xe^{-x} + kx)\,dx \\ &= \Big[\,-(x+1)e^{-x} - \frac{kx^2}{2}\,\Big]_0^a + \Big[\,(x+1)e^{-x} + \frac{kx^2}{2}\,\Big]_a^2 \\ &= -(a+1)e^{-a} + 1 - \frac{ka^2}{2} + 3e^{-2} - (a+1)e^{-a} + 2k - \frac{ka^2}{2} \\ &= 2(\log k - 1)k - k(\log k)^2 + 1 + 3e^{-2} + 2k \\ &= -k(\log k)^2 + 2k\log k + 1 + 3e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(k) &= -(\log k)^2 - 2k(\log k)\frac{1}{k} + 2\log k + 2k\cdot\frac{1}{k} \\ &= -(\log k)^2 + 2 \\ &= -(\log k + \sqrt{2}\,)(\log k - \sqrt{2}\,) \end{aligned}$$

k	e^{-2}	$\cdots$	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$h'(k)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$h(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって右の増減表を得るので $h(k)$ が最小となる k の値は $\boxed{k = e^{-\sqrt{2}}}$

【別解】最小値を与える $\boldsymbol{k}$ の値だけ求めたいので積分を計算する必要は無い

(1) のグラフより

$0 \leqq x \leqq a$ のとき $e^{-x} \geqq k \Longleftrightarrow f(x) \geqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

$a \leqq x \leqq 2$ のとき $e^{-x} \leqq k \Longleftrightarrow f(x) \leqq g(x)$　($x \geqq 0$ より)

よって $H(a) = \displaystyle\int_0^2 |\,f(x) - g(x)\,|\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} H(a) &= \int_0^a (xe^{-x} - kx)\,dx + \int_a^2 (-xe^{-x} + kx)\,dx \\ &= \int_0^a xe^{-x}dx - e^{-a}\int_0^a x\,dx + \int_2^a xe^{-x}dx - e^{-a}\int_2^a x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(a) &= ae^{-a} + e^{-a}\int_0^a x\,dx - ae^{-a} + ae^{-a} + e^{-a}\int_2^a x\,dx - ae^{-a} \\ &= e^{-a}\Big[\,\frac{x^2}{2}\,\Big]_0^a + e^{-a}\Big[\,\frac{x^2}{2}\,\Big]_2^a \\ &= (a^2 - 2)e^{-a} \\ &= (a + \sqrt{2}\,)(a - \sqrt{2}\,)e^{-a} \end{aligned}$$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$H'(a)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$H(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって右の増減表を得るので $H(a)$ が最小となる k の値は

$a = \sqrt{2} \Longleftrightarrow \boxed{k = e^{-\sqrt{2}}}$

'11 後期　理系　❹

p を自然数とする. 数列 $\{x_n\}$ を漸化式 $x_1=\cos\left(\dfrac{2\pi}{p}\right)\cdots$①,　$x_{n+1}=2(x_n)^2-1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots$② で定める.

(1) x_n を求めよ.

(2) l を自然数とする. $p=2^l$ および $p=3\times 2^l$ のそれぞれの場合について $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ.

(3) l を自然数とする. $p=5\times 2^l$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ は発散することを示せ.

(1) 観察

$x_2=2\cos^2\dfrac{2\pi}{p}-1=\cos\dfrac{2^2\pi}{p}$,　$x_3=2\cos^2\dfrac{2^2\pi}{p}-1=\cos\dfrac{2^3\pi}{p}$,　$\cdots$,　$x_n=\cos\dfrac{2^n\pi}{p}$ と予想できる.

$\forall n(\in\mathbb{N})$, $\underbrace{x_n=\cos\dfrac{2^n\pi}{p}}_{P(n)}$ が成り立つことを示す.

(i) $(P(1)$ 左辺$)=x_1=\cos\dfrac{2\pi}{p}$　(①より),　$(P(1)$ 右辺$)=\cos\dfrac{2\pi}{p}$ より $P(1)$ は成り立つ.

(ii) $k\,(\in\mathbb{N})$ に対し, $P(k)$ を仮定して $P(k+1)$ を示す.

$$\begin{aligned}(P(k+1)\text{ 左辺})=x_{k+1}&=2(x_k)^2-1\quad(\text{②より})\\&=2\cos^2\frac{2^k\pi}{p}-1\quad(\text{仮定 }P(k)\text{ より})\\&=\cos\frac{2^{k+1}\pi}{p}=(P(k+1)\text{ 右辺})\end{aligned}$$

よって $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$ は成り立つ.

(i), (ii) より数学的帰納法により, $\forall n\,(\in\mathbb{N}), P(n)$ が示された.

(2) 思考

$\{x_n\}$ が収束する場合, その極限値を α とおくと②より $\alpha=2\alpha^2-1\Longleftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2},\ 1$ なので,

$x_n=-\dfrac{1}{2},\ 1$ となる n を見つけてしまえば収束することが示せる.

(i) $p=2^l$ $(l\in\mathbb{N})$ のとき, $x_n=\cos 2^{n-l}\pi$ なので, $x_{l+1}=\cos 2\pi=1$ となる.

②より $x_{l+2}=2\cdot 1^2-1=1$ なので, 帰納的に以降の n に対し $x_n=1$ となる. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{1}$

(ii) $p=3\times 2^l$ $(l\in\mathbb{N})$ のとき, $x_n=\cos\dfrac{2^{n-l}\pi}{3}$ なので, $x_{l+1}=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ となる.

②より $x_{l+2}=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-1=-\dfrac{1}{2}$ なので, 帰納的に以降の n に対し $x_n=-\dfrac{1}{2}$ となる. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\boxed{-\frac{1}{2}}$

(3) $p=5\times 2^l$ $(l\in\mathbb{N})$ のとき, $x_n=\cos\dfrac{2^{n-l}\pi}{5}$ なので,

$x_{l+1}=\cos\dfrac{2\pi}{5}(=\alpha$とおく$)$, $x_{l+2}=\cos\dfrac{4\pi}{5}(=\beta$とおく$)$, $x_{l+3}=\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5}=\alpha$

となる.

これは②において, $x_n=\alpha$ のとき $x_{n+1}=\beta$, $x_n=\beta$ のとき $x_{n+1}=\alpha$

となることを意味しており, $\alpha\neq\beta$ なので,

帰納的に以降の n に対し x_n は異なる 2 つの値 $\alpha,\ \beta$ を繰り返す. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ は発散する.