'10 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日 名前

座標平面上の点 $(x\,,\,y)$ を点 $(x'\,,\,y')$ に移す点の移動 f が行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表せるとき, f を 1 次変換という. このとき A を 1 次変換 f を表す行列という. t を実数とし, 座標平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1\,,\,3)$, $\mathrm{Q}(2\,,\,-1)$, $\mathrm{R}\left(t\,,\,\dfrac{1}{3}t^2-5\right)$ をとる.

(1) P を Q に移し, Q を P に移す 1 次変換 g を表す行列を求めよ.

(2) さらに, g が R を R 自身に移すとする. このときの t と R を求めよ.

(3) 上で求めた R のうち $t<0$ であるものについて, 集合 $\{f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})\}$ が集合 $\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}\}$ と等しくなるような 1 次変換 f の個数を求めよ. ただし, P, Q, R を f で移した点をそれぞれ $f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})$ とする.

'10 後期　理系 ❹

座標平面上の点 $(x,\,y)$ を点 $(x',\,y')$ に移す点の移動 f が行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ で表せるとき, f を 1 次変換という. このとき A を 1 次変換 f を表す行列という. t を実数とし, 座標平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1,\,3)$, $\mathrm{Q}(2,\,-1)$, $\mathrm{R}\left(t,\,\frac{1}{3}t^2-5\right)$ をとる.

(1) P を Q に移し, Q を P に移す 1 次変換 g を表す行列を求めよ.

(2) さらに, g が R を R 自身に移すとする. このときの t と R を求めよ.

(3) 上で求めた R のうち $t<0$ であるものについて, 集合 $\{f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})\}$ が集合 $\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}\}$ と等しくなるような 1 次変換 f の個数を求めよ. ただし, P, Q, R を f で移した点をそれぞれ $f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})$ とする.

(1) g の表現行列を A とおくと,

$$\begin{cases} g(\mathrm{P})=\mathrm{Q} \\ g(\mathrm{Q})=\mathrm{P}\end{cases} \iff \begin{cases} A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\end{cases} \iff A\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix} \iff A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\iff A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}\right\} \iff \boxed{A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 3\\8 & -5\end{pmatrix}}$$

(2)【方針】不動点といえば固有値 1 の固有ベクトル

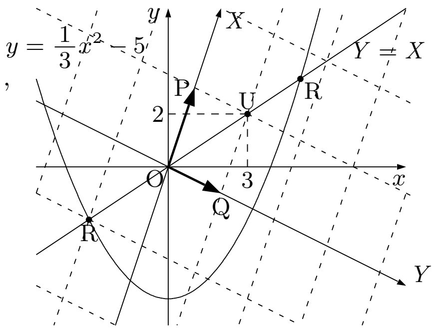
$g(\mathrm{R})=\mathrm{R} \iff \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は A の固有値 1 の固有ベクトル　($\overrightarrow{\mathrm{OR}}\neq\vec{0}$ より).

A の固有値は $\lambda^2-1=0 \iff \lambda=\pm1$ であり,

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 3\\8 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} /\!\!/ \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ なので,

$\begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{3}t^2-5\end{pmatrix} /\!\!/ \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \iff t^2-2t-15=0 \iff t=5,\ -3$ より $\boxed{t=5 \text{ のとき } \mathrm{R}\left(5,\ \frac{10}{3}\right),\ t=-3 \text{ のとき } \mathrm{R}(-3,\,-2)}$

【別解】f の意味を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を基底としてとらえる



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OU}}$ とおき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を基底とする XY 平面を考えると,

$g(\mathrm{P})=\mathrm{Q}\wedge g(\mathrm{Q})=\mathrm{P}$ より g は $(X,\ Y)$ の $(Y,\ X)$ への変換を意味するので

$g(\mathrm{R})=\mathrm{R} \iff \mathrm{R}\in(\text{直線 OU}: Y=X)$

$\iff \mathrm{R}\left(t,\ \frac{1}{3}t^2-5\right)\in\left(\text{直線 OU}: y=\frac{2}{3}x\right)$

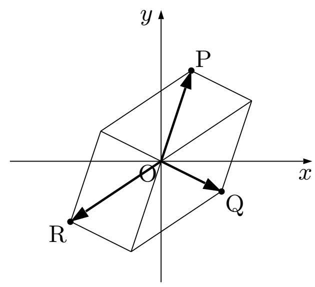
$\iff \frac{1}{3}t^2-5=\frac{2}{3}t \iff t^2-2t-15=0 \iff t=5,\ -3$

よって $\boxed{t=5 \text{ のとき } \mathrm{R}\left(5,\ \frac{10}{3}\right),\ t=-3 \text{ のとき } \mathrm{R}(-3,\,-2)}$

(3) (2) と $t<0$ より $\mathrm{R}(-3,\,-2)$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおくと, $\vec{p}+\vec{q}=-\vec{r}\cdots$① が成り立つ.

$\{f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})\}=\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}\}\cdots$☆ とすると,

☆ の要素の対応は $3!=6$ 通りなので, ☆ を満たす f の個数は 6 個以下である.



(i) $f(\vec{p})=\vec{q}$, $f(\vec{q})=\vec{p}$ のとき $f(\vec{r})=\vec{r}$　((2) より)

(ii) $f(\vec{q})=\vec{r}$, $f(\vec{r})=\vec{q}$ のとき $f(\vec{p})=f(-\vec{q}-\vec{r})$　(①より)

$=-f(\vec{q})-f(\vec{r})$　(f の線形性より)

$=-\vec{r}-\vec{q}=\vec{p}$　(①より)

(iii) $f(\vec{p})=\vec{r}$, $f(\vec{r})=\vec{p}$ のとき $f(\vec{q})=\vec{q}$　((ii) の $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を入れ替えたもの)

(iv) $f(\vec{p})=\vec{q}$, $f(\vec{q})=\vec{r}$ のとき $f(\vec{r})=f(-\vec{p}-\vec{q})=-f(\vec{p})-f(\vec{q})=-\vec{q}-\vec{r}=\vec{p}$

(v) $f(\vec{p})=\vec{r}$, $f(\vec{r})=\vec{q}$ のとき $f(\vec{q})=\vec{p}$　((iv) の $\vec{q}$ と $\vec{r}$ を入れ替えたもの)

(vi) $f(\vec{p})=\vec{p}$, $f(\vec{q})=\vec{q}$ のとき $f(\vec{r})=\vec{r}$　(f は恒等変換より)

(i)〜(vi) はすべて ☆ を満たし, かつ異なる変換なので, 求める個数は $\boxed{6\text{ 個}}$