'10 後期　理系 ❸

提出　　年　　月　　日 名前

1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して, 多角形 D_1, D_2, $\cdots$, D_n, $\cdots$ を次のように定める.

(i)　AB を D_{n-1}の 1 辺とする. 辺 AB を 3 等分し, その分点を A に近い方から P, Q とする.

(ii)　PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1}の外側に作る.

(iii) 辺 AB を折線 APRQB で置き換える.

D_{n-1} のすべての辺に対して (i)〜(iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする. 以下の問いに答えよ.

(1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ.

(2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

'10 後期　理系　❸

1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して, 多角形 D_1, D_2, $\cdots$, D_n, $\cdots$ を次のように定める.

(i)　AB を D_{n-1}の 1 辺とする. 辺 AB を 3 等分し, その分点を A に近い方から P, Q とする.

(ii)　PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1}の外側に作る.

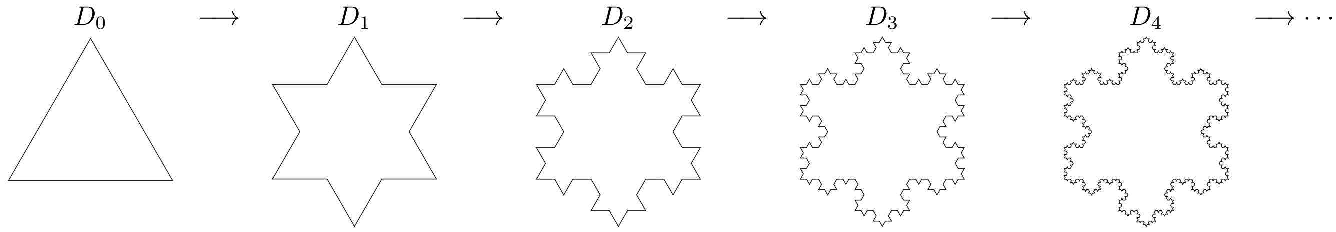
(iii) 辺 AB を折線 APRQB で置き換える.

D_{n-1} のすべての辺に対して (i)〜(iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする. 以下の問いに答えよ.

(1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ.

(2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.



(1) 1 回の操作で各辺が $\dfrac{4}{3}$ 倍されるので,

$$\begin{cases} L_0 = 3a \\ L_{n+1} = \dfrac{4}{3}L_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$ が成り立つ.

よって $\boxed{L_n = 3a\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$

(2) D_n の辺の個数を b_n, 辺の長さを c_n とおくと, $b_n = 3\cdot 4^n$, $c_n = a\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ であり,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (b_n\text{個の 1 辺 } c_{n+1}\text{の正三角形の面積}) \\ &= S_n + b_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}{c_{n+1}}^2 \\ &= S_n + 3\cdot 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}$$

よって $n \geqq 1$ において

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1}-S_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k &\iff S_n - S_0 = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} \\ &\iff S_n = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} + \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{20}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \\ &\iff S_n = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{20}\left\{\frac{8}{3}-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \\ &\iff S_n = \frac{a^2}{5\sqrt{3}}\left\{6-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}\cdots① \end{aligned}$$

$n=0$ のとき (①右辺) $= \dfrac{a^2}{5\sqrt{3}}\left(6-\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$ となるため ① は $n=0$ のときも正しく S_n を表す.

よって $\boxed{S_n = \dfrac{a^2}{5\sqrt{3}}\left\{6-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right\} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^2}{5\sqrt{3}}\cdot 6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}\,a^2}{5}}$

【補足】

1 辺に対しこの操作を果てしなく繰り返した曲線を「コッホ曲線」といい, 上のように正三角形の各辺に対しこの操作を果てしなく繰り返した $\displaystyle\lim_{n\to\infty} D_n$ を「コッホ雪片」といいます.

また「コッホ曲線」に代表されるような, 自分が自分自身の相似の繰り返しである図形を「フラクタル図形」と呼びます.