'10 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日　名前

c を実数として, 以下の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x に対して $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ となるような c の範囲を求めよ.

(2) c は (1) で求めた範囲にあるものとする. 2 つの曲線 $y = cx^2$ と $y = \log(1+x^2)$, および, 2 つの直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれる図形の面積が 4 となる c の値を求めよ.

'10 後期　理系 ❷

c を実数として, 以下の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x に対して $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ となるような c の範囲を求めよ.

(2) c は (1) で求めた範囲にあるものとする. 2 つの曲線 $y = cx^2$ と $y = \log(1+x^2)$, および, 2 つの直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれる図形の面積が 4 となる c の値を求めよ.

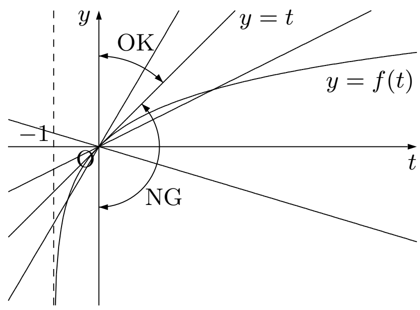
(1) $\forall x\,(\in \mathbb{R}),\ cx^2 \geqq \log(1+x^2) \iff \underline{\forall t\,(t \geqq 0),\ ct \geqq \log(1+t)}_{①}$ であり,

$f(t) = \log(1+t)$ とおくと,

$f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$ より $f'(0) = 1$,

$f''(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2} \leqq 0$ なので曲線 $y = f(t)$ は上に凸.

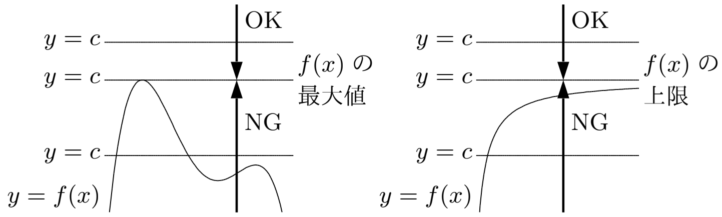
よって右図より ① $\iff \boxed{c \geqq 1}$



【別解】パラメータを孤立させる

思考

$\forall x,\ c \geqq f(x) \iff c \geqq (f(x)$ の最大値 (上限))



$\forall x\,(\in \mathbb{R}),\ cx^2 \geqq \log(1+x^2) \iff \underline{\forall t\,(t \geqq 0),\ ct \geqq \log(1+t)}_{①}$ であり,

$t = 0$ のとき $ct \geqq \log(1+t) \iff 0 \geqq 0$ よりこれは任意の c で成り立つので,

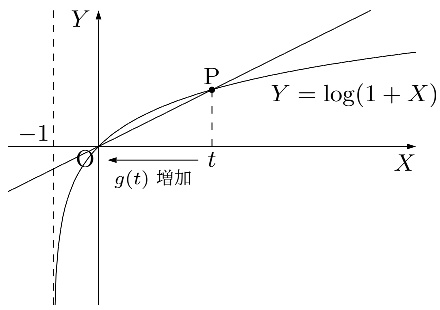
① $\iff \underline{\forall t\,(t > 0),\ c \geqq \dfrac{\log(1+t)}{t}}_{①'}$ となる.

$g(t) = \dfrac{\log(1+t)}{t}$ とおき, $\mathrm{P}(t\,,\ \log(1+t))$ とおくと,

XY 平面上において $g(t) = (\mathrm{OP}$ の傾き$)$ を意味する.

曲線 $Y = \log(1+X)$ は上に凸なので, $(g(t)$ の上限$) = \displaystyle\lim_{t \to +0} g(t) = 1$

よって ①$'$ $\iff \boxed{c \geqq 1}$



(2) $y = cx^2$ と $y = \log(1+x^2)$, 2 直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれる図形の面積を S とすると,

$c \geqq 1$ のもとで $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ なので,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \{cx^2 - \log(1+x^2)\}dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \{cx^2 - \log(1+x^2)\}dx \quad \text{(被積分関数が偶関数なので)} \\ &= 2\Big[\frac{cx^3}{3} - x\log(1+x^2)\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{2c}{3} - 2\log 2 + 4\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)dx \end{aligned}$$

ここで, $x = \tan\theta$ とおくと, $dx = (1+\tan^2\theta)d\theta$, $\begin{array}{c||c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$ なので, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$.

よって $S = \dfrac{2c}{3} - 2\log 2 + 4 - \pi$ となるので,

$S = 4 \iff \dfrac{2c}{3} - 2\log 2 + 4 - \pi = 4 \iff c = \boxed{3\log 2 + \dfrac{3\pi}{2}}$　(これは $c \geqq 1$ を満たす)