’10 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

次の連立不等式の表す領域を D とする.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0 \end{cases}$$

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 点 $(x\,,\,y)$ がこの領域 D を動くとき, $x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ. また, $M,\ m$ を与える D の点を求めよ.

(3) a を実数とする. 点 $(x\,,\,y)$ が領域 D を動くとき, $ax+y$ が点 $(-3\,,\,4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

'10 後期　理系 ❶

次の連立不等式の表す領域を D とする.

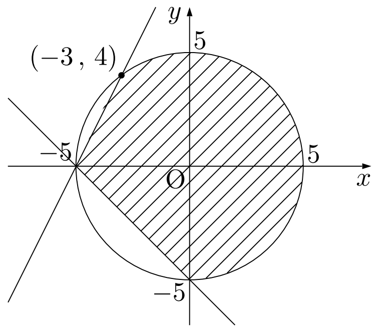
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0 \end{cases}$$

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 点 $(x\,,\,y)$ がこの領域 D を動くとき, $x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ. また, M, m を与える D の点を求めよ.

(3) a を実数とする. 点 $(x\,,\,y)$ が領域 D を動くとき, $ax+y$ が点 $(-3\,,\,4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

(1) 右図斜線部. 境界含む.



(2)【方針】逆像法

点 $(x\,,\,y)$ がこの領域 D を動くときの $x+2y$ の値域を W とおく.

$k \in W \iff \exists(x,\,y)\,(\in D),\ x+2y=k$

$\iff$ 直線 $l_k: x+2y-k=0$ が D と共有点を持つ $\cdots$ ①

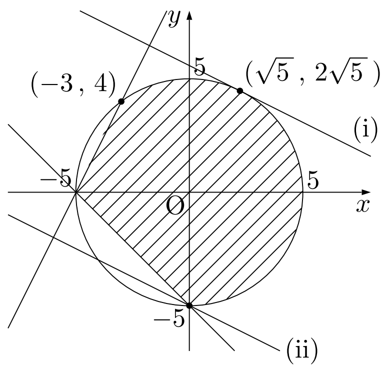
(i) l_kが円 $x^2+y^2=25$ と接する $\iff l_k$と $\mathrm{O}(0\,,\,0)$ の距離が 5

$$\iff \frac{|k|}{\sqrt{5}}=5$$

$$\iff k=\pm 5\sqrt{5}$$

第 1 象限で接するときの k の値は y 切片が正となるものなので $k=5\sqrt{5}$,
接点は $(\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{5}\,)$.

(ii) l_k が点 $(0\,,\,-5)$ を通る $\iff k=-10$



(i), (ii) と右図より ① $\iff -10 \leqq k \leqq 5\sqrt{5}$　なので $W: -10 \leqq x+2y \leqq 5\sqrt{5}$.

よって $\boxed{\begin{cases} M=5\sqrt{5} & (x,\,y)=(\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{5}\,)\ \text{のとき} \\ m=-10 & (x,\,y)=(0,\,-5)\ \text{のとき} \end{cases}}$

(3) $(-3,\,4) \in D$ なので,

$ax+y$ が点 $(-3\,,\,4)$ で最大値をとる $\iff \underline{\forall(x,\,y)\,(\in D),\ ax+y \leqq -3a+4}$ ②

ここで $E_a: ax+y \leqq -3a+4 \iff y \leqq -a(x+3)+4$ とおくと,

E_a は定点 $(-3\,,\,4)$ を通り傾き $-a$ の直線およびその下側なので,

② $\iff D \subset E_a$

$\iff \dfrac{3}{4} \leqq -a \leqq 2$ (右図より)

$\iff \boxed{-2 \leqq a \leqq -\dfrac{3}{4}}$