’10 後期　理系 ❶

提出　　　年　　月　　日 名前

次の連立不等式の表す領域を D とする.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0 \end{cases}$$

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 点 $(x\,,\,y)$ がこの領域 D を動くとき, $x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ. また, $M,\ m$ を与える D の点を求めよ.

(3) a を実数とする. 点 $(x\,,\,y)$ が領域 D を動くとき, $ax+y$ が点 $(-3\,,\,4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

’10 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日 名前

c を実数として, 以下の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x に対して $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ となるような c の範囲を求めよ.

(2) c は (1) で求めた範囲にあるものとする. 2 つの曲線 $y = cx^2$ と $y = \log(1+x^2)$, および, 2 つの直線 $x = 1$ と $x = -1$ で囲まれる図形の面積が 4 となる c の値を求めよ.

’10 後期　理系 ❸

提出　　　年　　月　　日 名前

1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して, 多角形 D_1, D_2, $\cdots$, D_n, $\cdots$ を次のように定める.

(i)　AB を D_{n-1}の 1 辺とする. 辺 AB を 3 等分し, その分点を A に近い方から P, Q とする.

(ii)　PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1}の外側に作る.

(iii) 辺 AB を折線 APRQB で置き換える.

D_{n-1} のすべての辺に対して (i)～(iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする. 以下の問いに答えよ.

(1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ.

(2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

’10 後期　理系 ❹

提出　　　年　　月　　日　名前

座標平面上の点 $(x\,,\,y)$ を点 $(x'\,,\,y')$ に移す点の移動 f が行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表せるとき, f を 1 次変換という. このとき A を 1 次変換 f を表す行列という. t を実数とし, 座標平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1\,,\,3)$, $\mathrm{Q}(2\,,\,-1)$, $\mathrm{R}\left(t\,,\,\dfrac{1}{3}t^2-5\right)$ をとる.

(1) P を Q に移し, Q を P に移す 1 次変換 g を表す行列を求めよ.

(2) さらに, g が R を R 自身に移すとする. このときの t と R を求めよ.

(3) 上で求めた R のうち $t<0$ であるものについて, 集合 $\{f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})\}$ が集合 $\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}\}$ と等しくなるような 1 次変換 f の個数を求めよ. ただし, P, Q, R を f で移した点をそれぞれ $f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})$ とする.

'10 後期 理系 ❶

次の連立不等式の表す領域を D とする.

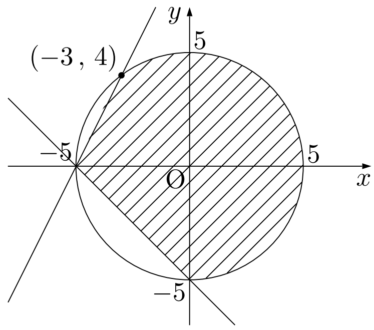
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0 \end{cases}$$

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 点 $(x\,,\,y)$ がこの領域 D を動くとき, $x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ. また, $M,\ m$ を与える D の点を求めよ.

(3) a を実数とする. 点 $(x\,,\,y)$ が領域 D を動くとき, $ax+y$ が点 $(-3\,,\,4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ.

(1) 右図斜線部. 境界含む.



(2)【方針】逆像法

点 $(x\,,\,y)$ がこの領域 D を動くときの $x+2y$ の値域を W とおく.

$k \in W \iff \exists(x,\,y)\,(\in D),\ x+2y=k$

$\iff$ 直線 $l_k : x+2y-k=0$ が D と共有点を持つ $\cdots$ ①

(i) l_kが円 $x^2+y^2=25$ と接する $\iff l_k$ と $\mathrm{O}(0\,,\,0)$ の距離が 5

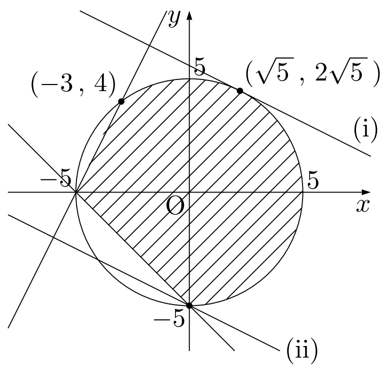
$$\iff \frac{|k|}{\sqrt{5}}=5$$

$$\iff k=\pm 5\sqrt{5}$$

第 1 象限で接するときの k の値は y 切片が正となるものなので $k=5\sqrt{5}$,

接点は $(\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{5}\,)$.

(ii) l_k が点 $(0\,,\,-5)$ を通る $\iff k=-10$



(i), (ii) と右図より ① $\iff -10 \leqq k \leqq 5\sqrt{5}$ なので $W : -10 \leqq x+2y \leqq 5\sqrt{5}$.

よって $\boxed{\begin{cases} M=5\sqrt{5} & (x,\,y)=(\sqrt{5}\,,\,2\sqrt{5}\,) \text{ のとき} \\ m=-10 & (x,\,y)=(0,\,-5) \text{ のとき} \end{cases}}$

(3) $(-3,\,4) \in D$ なので,

$ax+y$ が点 $(-3\,,\,4)$ で最大値をとる $\iff \underline{\forall(x,\,y)\,(\in D),\ ax+y \leqq -3a+4}$ ②

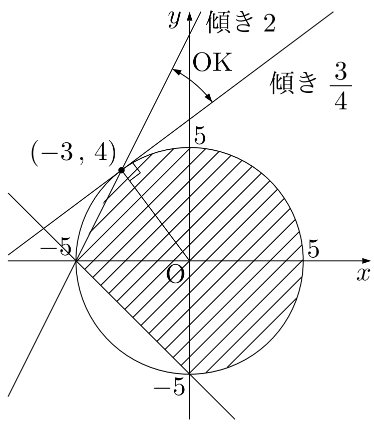
ここで $E_a : ax+y \leqq -3a+4 \iff y \leqq -a(x+3)+4$ とおくと,

E_a は定点 $(-3\,,\,4)$ を通り傾き $-a$ の直線およびその下側なので,

② $\iff D \subset E_a$

$\iff \dfrac{3}{4} \leqq -a \leqq 2$ (右図より)

$\iff \boxed{-2 \leqq a \leqq -\dfrac{3}{4}}$



'10 後期　理系 ❷

c を実数として, 以下の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x に対して $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ となるような c の範囲を求めよ.

(2) c は (1) で求めた範囲にあるものとする. 2 つの曲線 $y=cx^2$ と $y=\log(1+x^2)$, および, 2 つの直線 $x=1$ と $x=-1$ で囲まれる図形の面積が 4 となる c の値を求めよ.

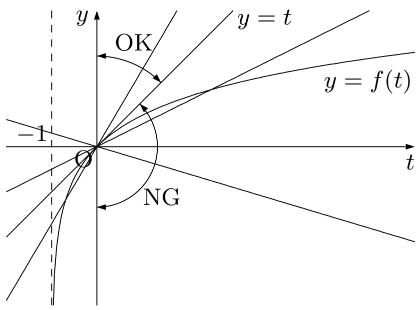
(1) $\forall x\,(\in \mathbb{R}),\ cx^2 \geqq \log(1+x^2) \iff \underline{\forall t\,(t \geqq 0),\ ct \geqq \log(1+t)}_{①}$ であり,

$f(t)=\log(1+t)$ とおくと,

$f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$ より $f'(0)=1$,

$f''(t)=-\dfrac{1}{(1+t)^2} \leqq 0$ なので曲線 $y=f(t)$ は上に凸.

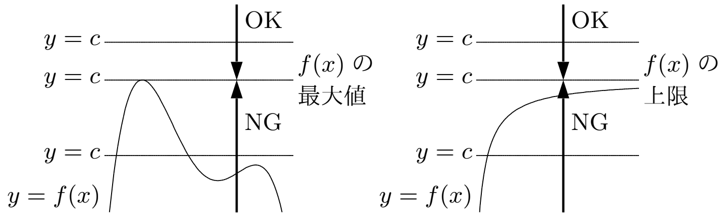
よって右図より ① $\iff \boxed{c \geqq 1}$



【別解】パラメータを孤立させる

思考

$\forall x,\ c \geqq f(x) \iff c \geqq (f(x)$ の最大値 (上限))



$\forall x\,(\in \mathbb{R}),\ cx^2 \geqq \log(1+x^2) \iff \underline{\forall t\,(t \geqq 0),\ ct \geqq \log(1+t)}_{①}$ であり,

$t=0$ のとき $ct \geqq \log(1+t) \iff 0 \geqq 0$ よりこれは任意の c で成り立つので,

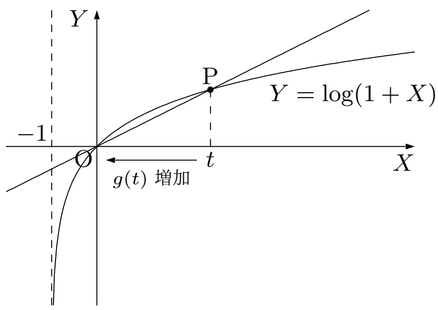
① $\iff \underline{\forall t\,(t>0),\ c \geqq \dfrac{\log(1+t)}{t}}_{①'}$ となる.

$g(t)=\dfrac{\log(1+t)}{t}$ とおき, $\mathrm{P}(t\,,\,\log(1+t))$ とおくと,

XY 平面上において $g(t)=(\mathrm{OP}$ の傾き) を意味する.

曲線 $Y=\log(1+X)$ は上に凸なので, ($g(t)$ の上限) $=\displaystyle\lim_{t\to+0} g(t)=1$

よって ①$'$ $\iff \boxed{c \geqq 1}$



(2) $y=cx^2$ と $y=\log(1+x^2)$, 2 直線 $x=1$ と $x=-1$ で囲まれる図形の面積を S とすると,

$c \geqq 1$ のもとで $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ なので,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \{cx^2-\log(1+x^2)\}dx \\ &= 2\int_0^1 \{cx^2-\log(1+x^2)\}dx \quad (\text{被積分関数が偶関数なので}) \\ &= 2\Big[\frac{cx^3}{3}-x\log(1+x^2)\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{2c}{3}-2\log 2+4\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)dx \end{aligned}$$

ここで, $x=\tan\theta$ とおくと, $dx=(1+\tan^2\theta)d\theta$, $\begin{array}{c||c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$ なので, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$.

よって $S=\dfrac{2c}{3}-2\log 2+4-\pi$ となるので,

$S=4 \iff \dfrac{2c}{3}-2\log 2+4-\pi=4 \iff c=\boxed{3\log 2+\dfrac{3\pi}{2}}$　(これは $c \geqq 1$ を満たす)

'10 後期　理系 ❸

1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して, 多角形 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n,\ \cdots$ を次のように定める.

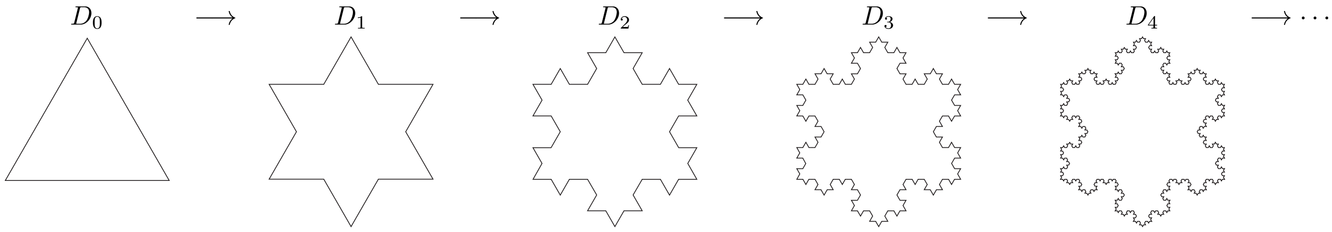
(i)　AB を D_{n-1}の 1 辺とする. 辺 AB を 3 等分し, その分点を A に近い方から P, Q とする.
(ii)　PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1}の外側に作る.
(iii) 辺 AB を折線 APRQB で置き換える.

D_{n-1} のすべての辺に対して (i)〜(iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする. 以下の問いに答えよ.

(1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ.

(2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ.

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.



(1) 1 回の操作で各辺が $\dfrac{4}{3}$ 倍されるので,

$$\begin{cases} L_0 = 3a \\ L_{n+1} = \dfrac{4}{3}L_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$ が成り立つ.

よって $\boxed{L_n = 3a\left(\dfrac{4}{3}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$

(2) D_n の辺の個数を b_n, 辺の長さを c_n とおくと, $b_n = 3\cdot 4^n$, $c_n = a\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ であり,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (b_n\text{個の 1 辺 } c_{n+1}\text{の正三角形の面積}) \\ &= S_n + b_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}{c_{n+1}}^2 \\ &= S_n + 3\cdot 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}$$

よって $n \geqq 1$ において

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1}-S_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k &\iff S_n - S_0 = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} \\ &\iff S_n = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} + \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{20}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \\ &\iff S_n = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{20}\left\{\frac{8}{3}-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} \\ &\iff S_n = \frac{a^2}{5\sqrt{3}}\left\{6-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}\cdots① \end{aligned}$$

$n=0$ のとき (①右辺) $= \dfrac{a^2}{5\sqrt{3}}\left(6-\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$ となるため ① は $n=0$ のときも正しく S_n を表す.

よって $\boxed{S_n = \dfrac{a^2}{5\sqrt{3}}\left\{6-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right\} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a^2}{5\sqrt{3}}\cdot 6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}\,a^2}{5}}$

【補足】

1 辺に対しこの操作を果てしなく繰り返した曲線を「コッホ曲線」といい, 上のように正三角形の各辺に対しこの操作を果てしなく繰り返した $\lim_{n\to\infty} D_n$ を「コッホ雪片」といいます.

また「コッホ曲線」に代表されるような, 自分が自分自身の相似の繰り返しである図形を「フラクタル図形」と呼びます.

’10 後期　理系 ❹

座標平面上の点 $(x\,,\,y)$ を点 $(x'\,,\,y')$ に移す点の移動 f が行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表せるとき, f を 1 次変換という. このとき A を 1 次変換 f を表す行列という. t を実数とし, 座標平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1\,,\,3)$, $\mathrm{Q}(2\,,\,-1)$, $\mathrm{R}\left(t,\ \frac{1}{3}t^2-5\right)$ をとる.

(1) P を Q に移し, Q を P に移す 1 次変換 g を表す行列を求めよ.

(2) さらに, g が R を R 自身に移すとする. このときの t と R を求めよ.

(3) 上で求めた R のうち $t<0$ であるものについて, 集合 $\{f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})\}$ が集合 $\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}\}$ と等しくなるような 1 次変換 f の個数を求めよ. ただし, P, Q, R を f で移した点をそれぞれ $f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})$ とする.

(1) g の表現行列を A とおくと,

$$\begin{cases} g(\mathrm{P})=\mathrm{Q} \\ g(\mathrm{Q})=\mathrm{P} \end{cases} \iff \begin{cases} A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \iff A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\iff A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right\} \iff \boxed{A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}}$$

(2) **【方針】不動点といえば固有値 1 の固有ベクトル**

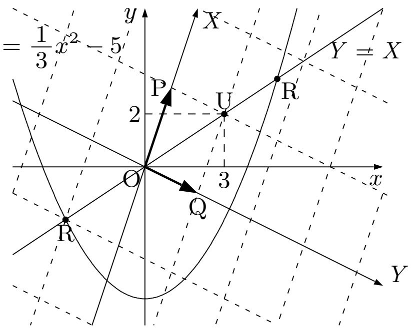
$g(\mathrm{R})=\mathrm{R} \iff \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は A の固有値 1 の固有ベクトル　($\overrightarrow{\mathrm{OR}} \neq \vec{0}$ より).

A の固有値は $\lambda^2-1=0 \iff \lambda=\pm 1$ であり,

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので,

$\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}t^2-5 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff t^2-2t-15=0 \iff t=5,\ -3$ より $\boxed{t=5 \text{ のとき } \mathrm{R}\left(5,\ \frac{10}{3}\right),\ t=-3 \text{ のとき } \mathrm{R}(-3\,,\,-2)}$

【別解】f の意味を $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を基底としてとらえる



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OU}}$ とおき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を基底とする XY 平面を考えると,

$g(\mathrm{P})=\mathrm{Q} \wedge g(\mathrm{Q})=\mathrm{P}$ より g は $(X,\ Y)$ の $(Y,\ X)$ への変換を意味するので

$g(\mathrm{R})=\mathrm{R} \iff \mathrm{R} \in (\text{直線 OU} : Y=X)$

$\iff \mathrm{R}\left(t,\ \frac{1}{3}t^2-5\right) \in \left(\text{直線 OU} : y=\frac{2}{3}x\right)$

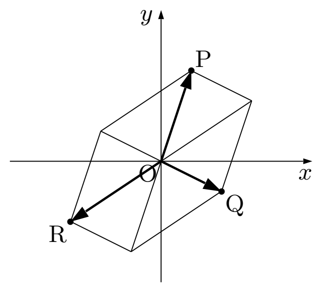
$\iff \frac{1}{3}t^2-5=\frac{2}{3}t \iff t^2-2t-15=0 \iff t=5,\ -3$

よって $\boxed{t=5 \text{ のとき } \mathrm{R}\left(5,\ \frac{10}{3}\right),\ t=-3 \text{ のとき } \mathrm{R}(-3\,,\,-2)}$

(3) (2) と $t<0$ より $\mathrm{R}(-3\,,\,-2)$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおくと, $\vec{p}+\vec{q}=-\vec{r}\cdots$① が成り立つ.

$\{f(\mathrm{P}),\ f(\mathrm{Q}),\ f(\mathrm{R})\}=\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R}\}\cdots$☆ とすると,

☆ の要素の対応は $3!=6$ 通りなので, ☆ を満たす f の個数は 6 個以下である.



(i) $f(\vec{p})=\vec{q},\ f(\vec{q})=\vec{p}$ のとき $f(\vec{r})=\vec{r}$　((2) より)

(ii) $f(\vec{q})=\vec{r},\ f(\vec{r})=\vec{q}$ のとき $f(\vec{p})=f(-\vec{q}-\vec{r})$　(①より)

$=-f(\vec{q})-f(\vec{r})$　(f の線形性より)

$=-\vec{r}-\vec{q}=\vec{p}$　(①より)

(iii) $f(\vec{p})=\vec{r},\ f(\vec{r})=\vec{p}$ のとき $f(\vec{q})=\vec{q}$　((ii) の $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を入れ替えたもの)

(iv) $f(\vec{p})=\vec{q},\ f(\vec{q})=\vec{r}$ のとき $f(\vec{r})=f(-\vec{p}-\vec{q})=-f(\vec{p})-f(\vec{q})=-\vec{q}-\vec{r}=\vec{p}$

(v) $f(\vec{p})=\vec{r},\ f(\vec{r})=\vec{q}$ のとき $f(\vec{q})=\vec{p}$　((iv) の $\vec{q}$ と $\vec{r}$ を入れ替えたもの)

(vi) $f(\vec{p})=\vec{p},\ f(\vec{q})=\vec{q}$ のとき $f(\vec{r})=\vec{r}$　(f は恒等変換より)

(i)〜(vi) はすべて ☆ を満たし, かつ異なる変換なので, 求める個数は $\boxed{6\text{ 個}}$