2 ベクトルの 1 次独立の定義

2 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し,

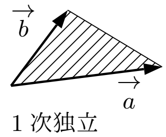
$$x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0} \implies x = 0 \text{ かつ } y = 0 \cdots ☆$$

が成り立つとき,「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立である」という.

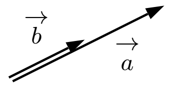
これだけでは「1 次独立」のイメージをつかむのは難しいのでこれを図形的な意味で表現すると以下のようになります.

2 ベクトルの 1 次独立

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立であるとは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が三角形を張ることである.



1 次独立



1 次独立ではない

そして定義 ☆ から導かれる性質が以下です.

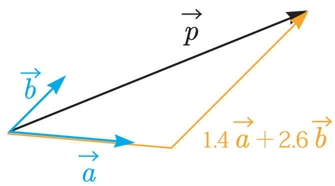
1 次独立な 2 ベクトルで表されたベクトルの相等

1 次独立な 2 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し,

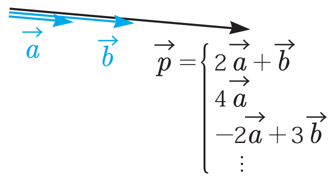
$$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} \implies x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2 \cdots ☆'$$

【☆′ の意味】

☆′ はあるベクトル $\vec{p}$ が 1 次独立な $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せるとき,
$\vec{p} = 1.4\vec{a} + 2.6\vec{b}$ とも書けるし $\vec{p} = 1.5\vec{a} + 2.3\vec{b}$ とも書けるなどということはなく,
係数の組み合わせはただ 1 通りに決まるということを意味しています.

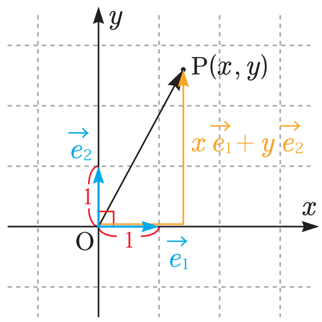


一方, あるベクトル $\vec{p}$ が 1 次独立ではない $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せるとき,
その係数は 1 通りとは限りません.



【☆′ の利用例】

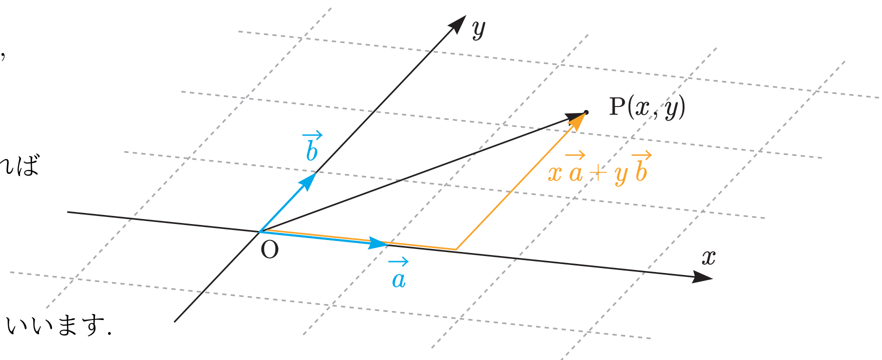
実は性質 ☆′ には数学を学び始めて間もないころからお世話になっています.
それが『座標によって場所を表現する』というシステムです.
その方法を改めて見てみると, xy 平面上での点 P の位置を表すのに,
右図のように長さが 1 で垂直なベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を用意し,
O を原点としたときの点 P の位置ベクトルである $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ と表されたとき,
その係数の組を用いて P の位置を $(x\,,\,y)$ と書くというのが座標です.
1 つの $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $1.4\vec{e_1} + 2.6\vec{e_2}$ とも書けるし $1.5\vec{e_1} + 2.3\vec{e_2}$ とも書けるなどということはない,
すなわち
1 つの点 P の座標が $(1.4\,,\,2.6)$ とも書けるし $(1.5\,,\,2.3)$ とも書けるなどということはなく,
ただ 1 通りに決まるのは, 基準として選んだ $\vec{e_1}$ と $\vec{e_2}$ が 1 次独立だからなのです.



この $\vec{e_1}$ と $\vec{e_2}$ のように, 平面上のベクトルを表現する基準となる 2 ベクトルを「平面の基底」といいます.

【座標平面の拡張】

$\vec{e_1}$ と $\vec{e_2}$ を基底とした座標平面が作れるのは,
長さが 1 だからでも垂直だからでもなく,
1 次独立だからなのです.
つまり, 1 次独立な 2 ベクトルでありさえすれば
それを基底とした座標平面を作ることが
できるのです.
基底が垂直である「直交座標平面」に対し,
右図のような座標平面を「斜交座標平面」といいます.



ここまでが当たり前の感覚として身についていれば下の問題は一瞬です.

右図 $\triangle$OAB があり, $s,\ t$ を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots$①

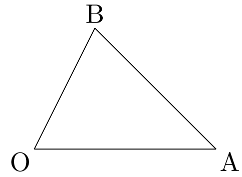
とおく. $s,\ t$ が次の条件を満たしながら変化するとき,

点 P の存在する範囲を図示せよ.

(1) $s+t=1$

(2) $s+t=2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$

(3) $1\leqq s+t\leqq 2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$



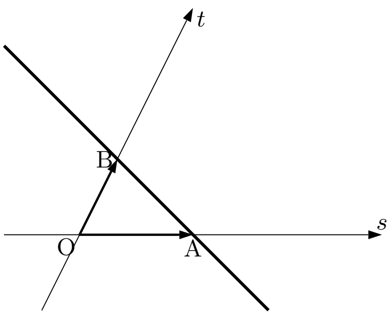
(解答)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は三角形を張るので 1 次独立である.

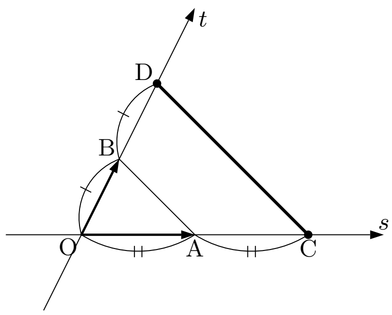
よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基底とする座標平面である st 平面を考えることができ,

① は点 P の座標が $(s\,,\,t)$ であることを意味する.

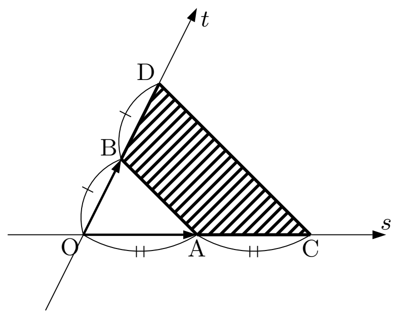
(1) $s+t=1$
P の軌跡は直線 AB



(2) $s+t=2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$
P の軌跡は線分 CD



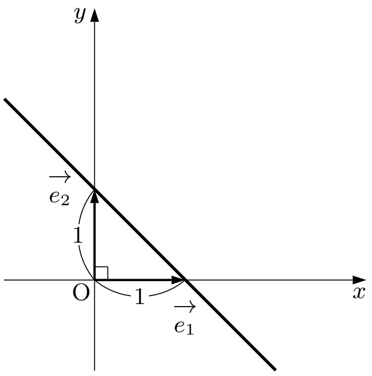
(3) $1\leqq s+t\leqq 2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$
P の軌跡は斜線部. 境界含む.



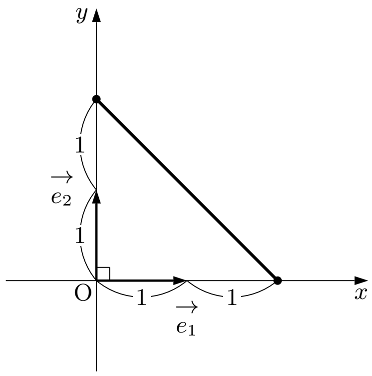
(解説)

これは xy 平面上において, 方程式, 不等式が表す図形を図示する問題と同様です.

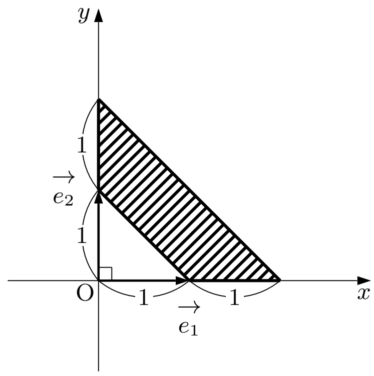
(1) $x+y=1$



(2) $x+y=2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$



(3) $1\leqq x+y\leqq 2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$



【メッセージ】

この問題を通して, 1 次独立な 2 ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表されているのを見たときは,

「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基底とした座標平面において点 P の座標が $(x\,,\,y)$ なんだな」

と自然に読めないと, もったいないということが分かっていただけたでしょう.

生徒から話を聞いていると, 様々な分野や道具の中でも特に「ベクトル」はそのイメージを正しく教わってきてないんだなと強く感じます. また, ベクトルの分野の問題というのがあるわけではなく, 問題を解決したり表現するただの道具なので, どこで持ち出してもかまいません.

「和と実数倍」という演算が, 移動をつなぐ・のばすという図形的イメージと結びついていない.

「1 次独立」という性質が, 座標平面や座標空間の基底と結びついていない.

「内積」という演算が, 正射影ベクトルと結びついていない.

目先の問題で答えを出すことに目を奪われて以上のような理解を疎かにすると, 結局は使い方を実感できず遠回りとなってしまうのです.