有名な『底の変換公式』の証明を行うだけでなく, 見ただけで当たり前と思えるようになることが目標です.
まずは log 記号のおさらいです.

$$
\begin{array}{lllll}
16 & \text{は}\,4\,\text{の} & 2 & \text{乗. つまり} & 16 = 4^2 \\
8 & \text{は}\,4\,\text{の} & \dfrac{3}{2} & \text{乗. つまり} & 8 = 4^{\frac{3}{2}} \\
\dfrac{1}{32} & \text{は}\,4\,\text{の} & -\dfrac{5}{2} & \text{乗. つまり} & \dfrac{1}{32} = 4^{-\frac{5}{2}} \\
c^B & \text{は}\,c^A\text{の} & \dfrac{B}{A} & \text{乗. つまり} & c^B = (c^A)^{\frac{B}{A}}
\end{array}
$$

では 9 は 4 の何乗でしょうか？ 分からないので記号を使って書くことにしましょう.

9 は 4 の $\log_4 9$ 乗と書く. つまり $9 = 4^{\log_4 9}$

これを一般化すると以下の定義になります.

log 記号

$a > 0, b > 0, b \neq 1$ である $a,\ b$ に対し,
a は b の $\log_b a$ 乗と書く. つまり「$\boldsymbol{a = b^{\log_b a}}$」

この log の定義は指数関数の底の変換公式とも呼ぶべきもので, 好きな底で表現し直せることを意味します.
これこそが log を扱ううえで最も基本的な式であり, 『底の変換公式』もこれが分かっていれば当たり前の公式なのです.

では証明です.

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$ である $a,\ b,\ c$ に対し,
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を証明せよ.

【証明】
$c > 0,\ c \neq 1$ を満たす c を用いることにより

$$\underbrace{\log_a b}_{b\text{ は }a\text{ の何乗か?}} = \underbrace{\log_{c^{\log_c a}} c^{\log_c b}}_{c^{\log_c b}\text{は }c^{\log_c a}\text{の何乗か?}} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

a も b も新たな底 c で表現

【メッセージ】
指数対数関数は, いわゆる”公式がいっぱいの分野”というイメージが強いかもしれません.
それらの証明ができないのは論外ですが, たとえ証明できたとしても, 置き換えのし過ぎや, 他の定理による遠回りのし過ぎなどによってその定理の本質が見えなくなってしまう方法はかえって理解を妨げてしまいます.
逆に本質をついた証明は定理の理解を深め, どういう時にどういう役に立つのかを同時に教えてくれるのです.

問) 対数法則 $\log_a p + \log_a q = \log_a pq$ を証明し, 指数法則 $a^{P+Q} = a^P a^Q$ と同じものであることを理解せよ.
解) $a^{\log_a p + \log_a q} = a^{\log_a p} a^{\log_a q}$ (指数法則 $a^{P+Q} = a^P a^Q$ より)
$= pq$
$= a^{\log_a pq}$

$y = \log_a x$ は x と y が 1 対 1 に対応するので $\log_a p + \log_a q = \log_a pq$ が示された.
また, この証明では指数法則以外には log の定義しか用いていないため, この定理が $a^{P+Q} = a^P a^Q$ と同じものであることが分かる.