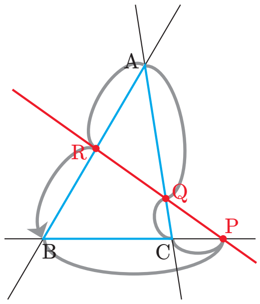
メネラウスの定理

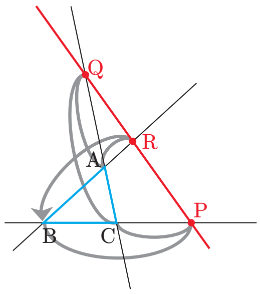
△ABC に対し, 3 直線 BC, CA, AB 上に A, B, C とは異なる 3 点 P, Q, R をとるとき,

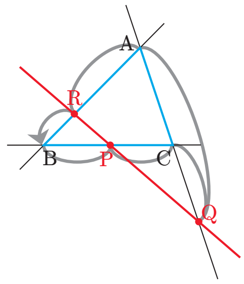
$$\text{P, Q, R が同一直線上} \implies \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

【イメージ】

「メネラウスの定理」はこのように”形”ではなく”情報”によって定まるので図は以下のように様々な場合が考えられます.







【式の構造】

まず, 頂点が一筆書きできるように配置されている.

$$\frac{\mathrm{B}\;\;}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

次に, 1 つの分数の中に現れる 3 頂点 □ は 1 直線上.

各分数に 2 回ずつ現れる 3 頂点 ○ は 1 直線上.

$$\boxed{\frac{\mathrm{B}\;\;}{\mathrm{PC}}}\cdot\boxed{\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}}\cdot\boxed{\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}}=1$$

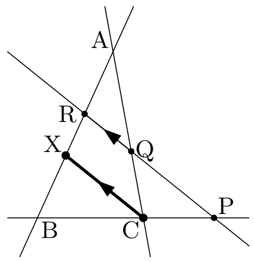
4 組の 3 点共線がある図で上の規則を守れば図の形によらずメネラウスの定理が完成する.

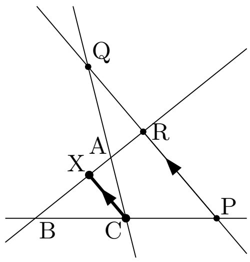
【証明】

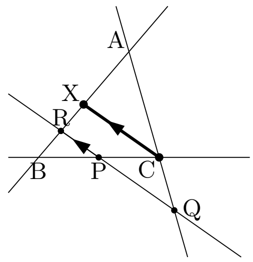
(参考までに図を用意したが, 図に左右されない証明であることに注目)

PQ と AB は平行ではないので, C を通り直線 PQ に平行な直線と, 直線 AB は 1 点で交わる. この交点を X とおくと,

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RX}}\cdot\frac{\mathrm{XR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$





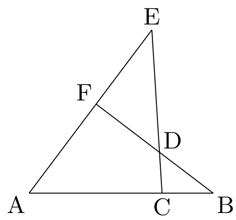


上の規則に従って以下の問に答える.

右図において以下の空欄を埋め, メネラウスの定理を完成せよ.

(1) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\square}\cdot\dfrac{\square}{\square}\cdot\dfrac{\square}{\square}=1$

(2) $\dfrac{\mathrm{BF}}{\square}\cdot\dfrac{\square}{\square}\cdot\dfrac{\square}{\square}=1$



(解答)

(1) $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\dfrac{\mathrm{B}\;\;}{\;\;}\cdot\dfrac{\;\;}{\;\;}=1$ (1 つの分数の中の 3 頂点は 1 直線上)

$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{D}\;\;}\cdot\dfrac{\;\;}{\;\;}=1$ (各分数に 2 回ずつ現れる 3 頂点は 1 直線上)

$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DF}}\cdot\dfrac{\mathrm{F}\;\;}{\;\;}=1$ (1 つの分数の中の 3 頂点は 1 直線上)

$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DF}}\cdot\dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{E}\;\;}=1$ (各分数に 2 回ずつ現れる 3 頂点は 1 直線上)

$\boxed{\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DF}}\cdot\dfrac{\mathrm{FE}}{\mathrm{EA}}=1}$ (1 つの分数の中の 3 頂点は 1 直線上)

(2) 同様に $\boxed{\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}}=1}$